Соответствующая исходная кривая Г изображена на рис. 7.12. Говорят в этом случае, что (0, 0) есть точка *возврата кривой* Г.

При $(\varphi)_0 > 0$ картина аналогична, но «возврат» имеет место в область $\xi < 0$ (рис. 7.13), когда подкоренное выражение положительно.

Конечно, если $(\varphi)_0 = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Заметим, что подстановка $\xi = u\eta$ не дает новой ветви кривой, потому что после сокращения (17) на η^2 получим уравнение $1 + \eta\gamma(\eta, u) = 0$, не имеющее решения при $\eta = 0$ и конечном u.

§ 7.24. Кривые на поверхности

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую поверхность σ:

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

и принадлежащую ей дважды дифференцируемую гладкую кривую Г: $\mathbf{r}(s) = \varphi(s)i + \psi(s)j + \xi(s)k$, где s — длина дуги Г.

Будем пользоваться обозначениями

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{2}$$

(мы думаем, что от того, что s обозначает длину дуги Г и производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, путаницы не произойдет).

Единичная нормаль к поверхности σ в ее точке $A = (x, y, z)$, образующая острый угол с положительным направлением оси z, равна

$$\mathbf{n} = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\,\mathbf{i} + \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\,\mathbf{k}.$$

С другой стороны, единичный вектор главной нормали к Г в A равен (§ 6.10, (3))

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|} = R\ddot{\mathbf{r}} = R\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2 y}{ds^2}\,\mathbf{j} + \frac{dz^2}{ds^2}\,\mathbf{k}\right) \quad (\ddot{\mathbf{r}} \neq 0),$$

где R — радиус кривизны Г ($R > 0$) и x, y, z — компоненты $\mathbf{r}$.

Обозначим через θ угол между $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$. Тогда

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{-p\,d^2 x - q\,d^2 y + d^2 z}{ds^2\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{3}$$

Но так как $\Gamma \subset \sigma$, то дифференциалы компонент $\mathbf{r}$ (соответствующие ds) удовлетворяют условию связи $dz = p\,dx + q\,dy$, откуда

$$d^2 z = p\,d^2 x + q\,d^2 y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2, \tag{4}$$

поэтому в силу (3)

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{r\alpha^2+2s\,\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{5}$$

где $\alpha=\frac{dx}{ds}$, $\beta=\frac{dy}{ds}$ — косинусы углов касательной к Γ соответственно с осями x, y.

Из формулы (5) непосредственно следует, что *все кривые $\Gamma\subset\sigma$, имеющие в точке $A\in\sigma$ общую соприкасающуюся плоскость L, отличную от касательной плоскости к σ в A, имеют в A одну и ту же кривизну.* Ведь для всех таких кривых правая часть (5) в точке A есть одно и то же число, так же как $\cos\theta$ для них — одно и то же число, а их кривизна в A равна частному от деления правой части (5) на $\cos\theta$. Таким образом, кривизна какой-нибудь из указанных кривых равна, например, кривизне той из них, которая получается как сечение поверхности σ соприкасающейся плоскостью L.

Это утверждение, вообще говоря, неверно, если $\cos\theta=0$, т. е. когда соприкасающаяся к Γ плоскость совпадает с касательной плоскостью к σ. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что две лежащие на плоскости касающиеся друг друга кривые не обязательно имеют в точке касания равные радиусы кривизны.

Пусть Γ есть нормальное сечение поверхности σ в ее точке A, т. е. кривая, по которой пересекается σ с плоскостью, проходящей через нормаль к σ в A, а Γ' — какое-либо сечение σ плоскостью, проходящей через касательную к Γ в точке A. Тогда для кривых Γ и Γ' правые части (5) в точке A равны между собой. К тому же для Γ угол $\theta=0$ или $\theta=\pi$. Поэтому имеет место равенство

$$\pm\frac{1}{R}=\frac{\cos\theta}{R'}, \tag{6}$$

где R и R' — радиусы кривизны соответственно нормального сечения и плоского сечения, имеющего с ним общую касательную.

Равенство (6) называется *формулой Менье* *). Его можно еще записать так: $R'=\pm R\cos\theta=R|\cos\theta|$ (так как $R>0$ и $R'>0$).

Формула (5) для радиуса кривизны нормального сечения имеет вид

$$\frac{1}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{7}$$

где слева надо было бы поставить знаки «±», соответствующие случаям $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Но мы этого делать не будем. Для дальнейшего будет более удобно разрешить радиусу кривизны иметь

---

*) Ж. Б. Менье (1754—1793) — французский математик.

как положительный, так и отрицательный знак ($R>0$ или $R<0$), в зависимости от того, будет ли вогнутость нормального сечения обращена в сторону положительной оси z или отрицательной.

Все предыдущие рассуждения, в том числе и формула (7), были выведены в предположении, что $|\ddot{\mathbf{r}}(s)|>0$, т. е. что R конечно. Ведь при $\ddot{\mathbf{r}}(s)=0$ понятие главной нормали к кривой не имеет смысла. Однако формула (7) верна и при $\ddot{\mathbf{r}}(s)=0$. В самом деле, левая часть (7) в этом случае равна нулю ($R=\infty$), но правая часть (7) тоже равна нулю. Ведь правая часть (3) равна нулю, а с ней в силу (4) и правая часть (5) или (7).

Перенесем начало прямоугольной системы координат в рассматриваемую точку A нашей поверхности σ, а ось z направим по нормали к σ. Тогда $p=q=0$, $\alpha^2+\beta^2=1$, и можно положить $\alpha=\cos\theta$, $\beta=\sin\theta$. Формула (7) радиуса кривизны нормального сечения тогда будет иметь вид

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\theta+2s\cos\theta\sin\theta+t\sin^2\theta=\frac{r+t}{2}+\frac{r-t}{2}\cos 2\theta+s\sin 2\theta. \tag{8}$$

Кривизна $1/R$ есть непрерывная функция на отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому она достигает на нем максимума и минимума, которые можно найти приравниванием нулю ее производной. В результате получим уравнение

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2s}{r-t}\quad (r\neq t). \tag{9}$$

На интервалах $(\pi/4, 3\pi/4)$ и $(3\pi/4, 5\pi/4)$ функция $\operatorname{tg} 2\theta$ строго возрастает, пробегая все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому на каждом из этих интервалов существует только по одному корню θ_1 и θ_2 уравнения (9). К тому же $\theta_2-\theta_1=\pi/2$. На периоде имеется еще два корня, $\theta_1+\pi$ и $\theta_2+\pi$, но они определяют те же сечения.

Итак, при $r\neq t$ имеется два и только два взаимно перпендикулярных направления, вдоль которых кривизна нормального сечения достигает своего максимума $1/R_1$ и минимума $1/R_2$. Если эти направления принять за оси координат x, y, то уравнение (8) будет иметь вид $1/R=r\cos^2\theta+t\sin^2\theta$, потому что в этом случае уравнение (9) должно удовлетворяться при $\theta=0$.

Имеем $1/R_1=r$, $1/R_2=t$, и мы получили формулу (Эйлера *))

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{10}$$

Числа R_1 и R_2 называются *главными радиусами кривизны* поверх-

*) Л. Эйлер (1707—1783) — великий математик, механик и физик, русский академик.

ности (в точке A). Они соответствуют *главным сечениям* поверхности (взаимно перпендикулярным между собой).

Сечению $\theta' = \theta + (\pi/2)$ соответствует согласно формулы (10) кривизна

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2\theta}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_2}.$$

Сложив (10) и последнее равенство, получим равенство

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

показывающее, что *сумма кривизн любых двух взаимно перпендикулярных сечений есть величина постоянная.* Она называется *средней кривизной поверхности в точке.*

Точки дважды непрерывно дифференцируемой поверхности принято классифицировать следующим образом.

1. Эллиптическая точка соответствует случаю $R_1R_2 > 0$. В этом случае R_1 и R_2 имеют одинаковые знаки, но тогда и R для любого сечения имеет тот же знак, т. е. все нормальные сечения имеют вогнутость в сторону положительной или отрицательной оси z, в зависимости от того, будет ли знак «+» или «−». Точки поверхности эллипсоида обладают этим свойством.

2. Гиперболическая точка соответствует случаю $R_1R_2 < 0$. В этом случае вогнутости главных сечений и прилегающих к ним сечений направлены в противоположные стороны. Так как кривизна $1/R$ есть непрерывная функция от θ, то должно существовать по крайней мере два сечения с кривизной, равной нулю.

На самом деле их только два, соответствующие значениям θ, для которых $\operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{-R_2/R_1}$; радиусы кривизны этих сечений бесконечны. Однополостный гиперболоид есть пример такой поверхности, ее точки обладают этим свойством.

3. Параболическая точка соответствует случаю $1/R_1R_2 = 0$ (но одно из чисел R_1, R_2 конечно). Таким образом, либо $R_1 > 0$, $1/R_2 = 0$ и тогда

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1},$$

либо $1/R_1 = 0$, $R_2 < 0$ и тогда $1/R = \sin^2\theta/R_2$.

В этом случае имеется только одно сечение, имеющее нулевую кривизну, а все остальные сечения имеют кривизну одного и того же знака, и вогнутость их направлена в одну сторону. Точки цилиндрической поверхности — пример этого случая.

Узнать, к какой категории относится точка поверхности $z = f(x, y)$ с касательной плоскостью, не обязательно параллельной осям x, y, можно по знаку $rt - s^2$. Пусть $r > 0$ и $rt - s^2 > 0$; тогда квадратическая форма

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 \tag{11}$$

строго положительно определена и величина $\cos\theta$ в формуле (5) для всех значений θ сохраняет знак, следовательно, рассматриваемая точка эллиптическая.

Если $rt - s^2 < 0$, то форма (11) меняет знак для некоторых двух разных пар (dx, dy), что указывает на гиперболичность точки. Если же $rt - s^2 = 0$, то форма (11) сохраняет знак для всех (dx, dy), за исключением одного направления, что показывает, что точка параболическая.

Этими рассуждениями мы косвенно доказали, что знак $rt - s^2$ есть инвариант по отношению к преобразованиям прямоугольных координат, при которых уравнение малого куска поверхности, содержащего точку A, записывается в явной форме $z = f(x, y)$. В этом можно убедиться также при помощи кропотливых выкладок связанных с заменой переменных в частных производных.

Пусть теперь $r = t$, $rt - s^2 = r^2 - s^2$; тогда формула (8) имеет вид $1/R = r + s\sin 2\theta$.

1) Если $r^2 - s^2 > 0$, то имеет место *эллиптическая точка*. При этом, если $s \neq 0$, имеется, как и в случае 1), два главных сечения с максимальным и минимальным радиусом кривизны. Если же $s = 0$, то $1/R = r = \mathrm{const}$ — все сечения имеют одну и ту же кривизну (*точка округления*).

2) Если $r^2 - s^2 < 0$, то имеет место *гиперболическая точка*.

3) Если $r^2 - s^2 = 0$, то, очевидно, это *параболическая точка*.

Пусть гладкая поверхность S задана в параметрической форме

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k} \qquad (u, v \in \Omega), \tag{12}$$

где Ω — область. Дифференциалам du, dv соответствуют в силу (12) дифференциалы компонент

$$\begin{gathered} dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv, \end{gathered} \tag{13}$$

которым в свою очередь соответствует выражение для квадрата дифференциала дуги на S:

$$\begin{gathered} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{gathered} \tag{14}$$

Выражение (14) есть квадратическая форма относительно du, dv. Для гладкой поверхности это строго определенная положительная форма, потому что ее дискриминант

$$EG - F^2 = \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|^2 > 0. \tag{15}$$

Определенную гладкую кривую $\Gamma \subset S$ можно задать при помощи непрерывно дифференцируемых функций

$$u = \lambda(t), \quad v = \mu(t), \quad (\lambda'^2 + \mu'^2 > 0). \tag{16}$$

Если λ и μ подставить в (12) вместо u и v, то получим гладкую кривую Γ, лежащую на S. Ведь для нее при любом t выражение

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0 \tag{17}$$

положительно — это следует из условия (16) в скобках и строгой положительности формы.

Умножая левую часть (17) на dt^2, получим (14), т. е. квадрат дифференциала нашей дуги Γ (соответствующего дифференциалу dt). Для данной дуги $\Gamma \subset S$ дифференциалы du и dv зависимы между собой, но если нас интересуют всевозможные $\Gamma \subset S$, проходящие через данную точку $A \in S$, то они, очевидно, определяют всевозможные пары дифференциалов du, dv.

Выведем формулу, соответствующую формуле (5) в параметрической форме. Для этого будем предполагать, что поверхность S не только гладкая, но и дважды непрерывно дифференцируемая.

Левую часть (5) можно еще записать так:

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{n})}{R} = (\ddot{\mathbf{r}}(s), \mathbf{n}) = \left(\ddot{\mathbf{r}}(s), \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|}\right), \tag{18}$$

где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль поверхности S. Мы считаем, что $\dot{\mathbf{r}}(u, v)$ есть вектор точки поверхности S, а $\mathbf{r}(s)$ — вектор точки Γ. Но

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{\mathbf{r}}_u \frac{du}{ds} + \dot{\mathbf{r}}_v \frac{dv}{ds},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \ddot{\mathbf{r}}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\ddot{\mathbf{r}}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \ddot{\mathbf{r}}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \dot{\mathbf{r}}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \dot{\mathbf{r}}_v \frac{d^2v}{ds^2},$$

и если учесть, что векторы $\dot{\mathbf{r}}_u$, $\dot{\mathbf{r}}_v$ ортогональны к $\mathbf{n}$, то

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\left(\ddot{\mathbf{r}}_{uu}du^2 + 2\ddot{\mathbf{r}}_{uv}du\,dv + \ddot{\mathbf{r}}_{vv}dv^2\right)(\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v)}{ds^2\,|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|},$$

где ds^2 можно заменить выражением (14)