§ 7.25. Криволинейные координаты в окрестности гладкой границы области

Пусть Ω — ограниченная область, граница которой есть гладкая (замкнутая) поверхность S. Из каждой точки $A \in S$ выпустим внутрь Ω нормаль и отметим на ней точку A_λ, находящуюся на расстоянии $\lambda > 0$ от A. Совокупность всех точек A_λ при данном фиксированном $\lambda > 0$ образует некоторую поверхность S_λ (рис. 7.14, где изображены сечения S, S_λ плоскостью). Если λ велико, то отдельные точки S_λ окажутся принадлежащими к разным нормалям. Другое дело, если λ достаточно мало. В этом случае можно ожидать, что в слое, находящемся между S и S_λ, нормали не пересекаются и тогда каждая его точка находится на одной и только одной нормали, выпущенной из некоторой точки $A \in S$. Это на самом деле имеет место, если поверхность S дважды дифференцируема, т. е. если описывающие ее локально функции имеют непрерывные вторые частные производные.

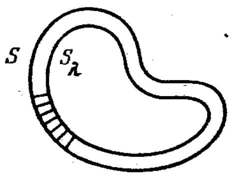

Рис. 7.14.

Ниже это утверждение доказывается в n-мерном случае.

Лемма. *Пусть непрерывная на открытом множестве $\Omega \subset R_n$ операция $y = A(x)$ отображает Ω на $\Omega' \in R_n$, вообще говоря, не взаимно однозначно. Однако некоторое замкнутое ограниченное множество F отображается взаимно однозначно; мало того, предположим, что каждой точке $x \in F$ можно указать ее окрестность $\Omega_x \subset \Omega$, отображаемую операцией A взаимно однозначно. Для любого $\lambda > 0$ введем множество F^λ, состоящее из точек Ω, каждая из которых отстоит хотя бы от одной точки F на расстоянии меньшем, чем λ. Тогда существует $\lambda_0 > 0$ такое, что A отображает F^{λ_0} взаимно однозначно: $F^{\lambda_0} \rightleftarrows \left(F^{\lambda_0}\right)'$.*

Доказательство. Зададим убывающую к нулю последовательность чисел λ_k. Если бы лемма была неверна, то для каждого k нашлись бы две различные точки x_k, $y_k \in F^{\lambda_k}$ такие, что $Ax_k = Ay_k$. Так как множество точек x_k, $y_k \in F^{\lambda_k} \subset F^{\lambda_1}$ ограничено, то для некоторой подпоследовательности индексов k, которую мы занумеруем заново, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}^0 \in F$, $\mathbf{y}_k \to y^0 \in F$, $A\mathbf{x}_k \to A\mathbf{x}^0$, $A\mathbf{y}_k \to A\mathbf{y}^0$, $A\mathbf{x}^0 = A\mathbf{y}^0$, откуда $\mathbf{x}^0 = \mathbf{y}^0$, потому что A отображает F на F' взаимно однозначно. Но это невозможно, потому что точка $\mathbf{x}^0 = \mathbf{y}^0$ принадлежит определенной окрестности Ω_{x^0} и при достаточно большом k будет $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}_k \in \Omega_{x^0}$, и так как $x_k \neq y_k$, то должно быть $A\mathbf{x}_k \neq A\mathbf{y}_k$.

Рассмотрим $(n-1)$-мерное многообразие S (см. § 17.1)

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{u}), \quad (\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \omega, \quad i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Точке $\mathbf{x} \in S$ приведем в соответствие единичный вектор

$$\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{2}$$

при помощи формул

$$\alpha_i = \frac{A_i}{\sqrt{\sum\limits_1^n A_i^2}} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

где A_i — алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя ($\Delta > 0$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{n-1}} \\ \vdots \quad \dots \dots \dots \\ \alpha_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = \sum_1^n \alpha_i A_i = \sqrt{\sum_1^n A_i^2}. \qquad (4)$$

Числа A_i одновременно не равны нулю, потому что ранг матрицы $\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right\|$ равен $n-1$.

Вектор $\mathbf{v}$ называется *единичным вектором нормали* к S *в точке* $\mathbf{x} \in S$. Другой единичный вектор нормали отличается от $\mathbf{v}$ знаком.

Важно, что $\mathbf{v}$ определяется эффективно по заданным уравнениям S. В этом проявляется ориентируемость многообразия S.

Для точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ некоторой окрестности S введем замену переменных

$$x_i = t\alpha_i + \varphi_i(u_1, \dots, u_{n-1}) \quad (\mathbf{u} \in \omega, \ i = 1, \dots, n), \qquad (5)$$

где t — новая действительная переменная. Сами по себе функции (5) определены при любом $\mathbf{u} \in \omega$ и любом действительном t. Они непрерывно дифференцируемы, потому что φ_i дважды непрерывно дифференцируемы. Важно еще, что какова бы ни была область $\omega' \subset \overline{\omega'} \subset \omega$, найдется такое $\delta > 0$, что множество

$$S^\delta = \{|t| \leqslant \delta, \mathbf{u} \in \overline{\omega'}\}$$

отображается при помощи уравнений (5) с положительным якобианом взаимно однозначно и, следовательно, непрерывно дифференцируемо в обе стороны. Это следует из доказанной выше леммы, потому что операция (5), которую мы обозначим через A, непрерывно отображает открытое множество $\Omega = \{-\infty < t < \infty, \mathbf{u} \in \omega\}$ пространства R_n в R_n; при этом замкнутое ограниченное множество $F = \{t = 0, \mathbf{u} \in \overline{\omega'}\} \subset \Omega$ отображается взаимно однозначно и, кроме того, каждой точке F можно указать ее окрестность, отображаемую операцией A взаимно однозначно (ведь в такой точке якобиан преобразования (5) $\Delta > 0$).

Рассмотрим еще трижды непрерывно дифференцируемую самонепересекающуюся кривую Γ $(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \neq 0)$

$$\mathbf{r} = \varphi(s)\mathbf{i} + \psi(s)j + \chi(s)k \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0),$$

где s — длина ее дуги. Ее единичная главная нормаль β и бинормаль γ будут тогда непрерывно дифференцируемыми (один раз) функциями от s (см. § 6.11). Положим

$$\rho = \mathbf{r} + \lambda\beta + \mu\gamma, \qquad (6)$$

где λ, μ — произвольные действительные числа. При помощи этого равенства каждой тройке чисел (s, λ, μ) $(0 \leqslant s \leqslant s_0, -\infty < \lambda, \mu < \infty)$ приводится в соответствие тройка (ξ, η, ζ) декартовых координат вектора ρ. Обозначим через H_p $(p > 0)$ множество точек пространства (s, λ, μ), определяемых неравенствами $0 \leqslant s \leqslant s_0$, $\lambda^2 + \mu^2 \leqslant p^2$. Координаты ξ, η, ζ вектора ρ суть непрерывно дифференцируемые функции от s, λ, μ с якобианом $D(s, \lambda, \mu)$, равным при $\lambda = \mu = 0$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = |\alpha(\beta \times \gamma)| = 1$$

(α_j, β_j, γ_j — соответственно компоненты единичных векторов касательной, главной нормали и бинормали). Так как кривая Γ самонепересекающаяся, то равенство (6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками $(s, 0, 0)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_0)$ замкнутого ограниченного в пространстве (s, λ, μ) множества и точками (ξ, η, ζ) кривой Γ. Но тогда на основании доказанной выше леммы найдется достаточно малое ρ, при котором операция (6) отображает множество H_ρ точек (s, λ, μ) на множество Ω точек (ξ, η, ζ) взаимно однозначно. Непрерывная дифференцируемость на Ω обратной операции имеет место на основании теоремы о неявных функциях во всяком случае при достаточно малом ρ, для которого якобиан $D(s, \lambda, \mu) > 0$.

Благодаря приведенному рассуждению нам удалось в достаточно малой окрестности Ω кривой Γ создать криволинейную систему координат (s, λ, μ), в которой Γ определяется уравнениями $\lambda = 0$, $\mu = 0$, и при этом между этими координатами и декартовыми координатами (ξ, η, ζ) точек Ω имеет место взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое в обе стороны соответствие $\xi = f_1(s_1, \lambda, \mu)$, $\eta = f_2(s, \lambda, \mu)$, $\zeta = f_3(s, \lambda, \mu)$ (см. еще по этому поводу § 17.2).

§ 7.26. Замена переменных в частных производных

Ограничимся рассмотрением двумерного случая. В n-мерном случае выкладки аналогичны.

1) Рассмотрим функцию

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \tag{2}$$

Покажем, как производные $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ выражаются через производные от z по u и v. Для этого продифференцируем (1) по u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{3}$$

Решая эти уравнения относительно p и q, получим

$$p = \frac{\dfrac{D(z, y)}{D(u, v)}}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}, \quad q = \frac{\dfrac{D(x, z)}{D(u, v)}}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}. \tag{4}$$

Конечно, в этих рассуждениях предполагается, что φ и ψ имеют непрерывные частные производные по u, v с неравным нулю якобианом. В дальнейшем подобные условия, обеспечивающие разрешимость соответствующих уравнений, мы будем предполагать выполненными, не оговаривая это особо.

Равенства (4) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = C\frac{\partial z}{\partial u} + D\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{5}$$

где важно отметить, что коэффициенты A, B, C, D зависят только