(α_j, β_j, γ_j — соответственно компоненты единичных векторов касательной, главной нормали и бинормали). Так как кривая Г самонепересекающаяся, то равенство (6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками $(s, 0, 0)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_0)$ замкнутого ограниченного в пространстве (s, λ, μ) множества и точками (ξ, η, ζ) кривой Г. Но тогда на основании доказанной выше леммы найдется достаточно малое ρ, при котором операция (6) отображает множество H_ρ точек (s, λ, μ) на множество Ω точек (ξ, η, ζ) взаимно однозначно. Непрерывная дифференцируемость на Ω обратной операции имеет место на основании теоремы о неявных функциях во всяком случае при достаточно малом ρ, для которого якобиан $D(s, \lambda, \mu) > 0$.

Благодаря приведенному рассуждению нам удалось в достаточно малой окрестности Ω кривой Г создать криволинейную систему координат (s, λ, μ), в которой Г определяется уравнениями $\lambda = 0$, $\mu = 0$, и при этом между этими координатами и декартовыми координатами (ξ, η, ζ) точек Ω имеет место взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое в обе стороны соответствие $\xi = f_1(s_1, \lambda, \mu)$, $\eta = f_2(s, \lambda, \mu)$, $\zeta = f_3(s, \lambda, \mu)$ (см. еще по этому поводу § 17.2).

§ 7.26. Замена переменных в частных производных

Ограничимся рассмотрением двумерного случая. В n-мерном случае выкладки аналогичны.

1) Рассмотрим функцию

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \tag{2}$$

Покажем, как производные $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ выражаются через производные от z по u и v. Для этого продифференцируем (1) по u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{3}$$

Решая эти уравнения относительно p и q, получим

$$p = \frac{\dfrac{D(z, y)}{D(u, v)}}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}, \quad q = \frac{\dfrac{D(x, z)}{D(u, v)}}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}. \tag{4}$$

Конечно, в этих рассуждениях предполагается, что φ и ψ имеют непрерывные частные производные по u, v с неравным нулю якобианом. В дальнейшем подобные условия, обеспечивающие разрешимость соответствующих уравнений, мы будем предполагать выполненными, не оговаривая это особо.

Равенства (4) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = C\frac{\partial z}{\partial u} + D\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{5}$$

где важно отметить, что коэффициенты A, B, C, D зависят только от u, v, но не от z. Но тогда

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = A\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$
$$= A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) + B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) = A^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} +$$
$$+ 2AB\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + B^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \left(A\frac{\partial A}{\partial u} + B\frac{\partial A}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \left(A\frac{\partial B}{\partial u} + B\frac{\partial B}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{6}$$

и мы получили выражение для частной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ через частные производные от z по u и v.

Чтобы вычислить $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, поступаем подобным образом. Производные более высокого порядка вычисляются последовательно этим же методом. Так, для вычисления $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ надо подставить в правую часть (6) $A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}$ вместо z и произвести нужные дифференцирования.

2) Решим теперь более общую задачу. Пусть заданы уравнения

$$F_j(x, y, z, u, v, w) = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \tag{7}$$

связывающие x, y, z и новые переменные u, v, w. Требуется производные p, q, r, s, t выразить через частные производные от w по u и v. Так как z есть функция от x, y, то u, v, w суть тоже функции от x, y.

Продифференцируем равенства (7), считая x, y независимыми переменными

$$\frac{\partial F_j}{\partial x}dx + \frac{\partial F_j}{\partial y}dy + \frac{\partial F_j}{\partial z}dz + \frac{\partial F_j}{\partial u}du + \frac{\partial F_j}{\partial v}dv + \frac{\partial F_j}{\partial w}dw = 0 \tag{8}$$
$$(j = 1, 2, 3),$$

и решим систему (8) относительно du, dv, dw:

$$\left.\begin{aligned} du &= A_1^1dx + A_2^1dy + A_3^1dz,\\ dv &= A_1^2dx + A_2^2dy + A_3^2dz,\\ dw &= A_1^3dx + A_2^3dy + A_3^3dz.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь коэффициенты A_i^j зависят от x, y, z, u, v, w. Так как $dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv$, то, подставляя в это равенство выражения (9) для дифференциалов du, dv, dw и решая полученное уравнение относительно dz, придем к равенству

$$dz = M\,dx + N\,dy, \tag{10}$$

где M и N зависят от x, y, z, u, v, w, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$.

В силу независимости дифференциалов dx, dy справедливы равенства

$$p = M, \quad q = N, \tag{11}$$

решающие поставленную задачу для производных первого порядка. Чтобы ее решить для производных второго порядка, вычислим вторые дифференциалы от u, v, w, соответствующие независимым дифференциалам dx, dy.

При вычислении, кроме dx, dy, появятся дифференциалы dz, du, dv, dw, которые заменяются через dx, dy при помощи формул (9), (10); кроме того, появится дифференциал d^2z, и мы получим

$$\left.\begin{aligned} d^2u &= B_1^1dx^2 + B_2^1dx\,dy + B_3^1dy^2 + B_4^1d^2z,\\ d^2v &= B_1^2dx^2 + B_2^2dx\,dy + B_3^2dy^2 + B_4^2d^2z,\\ d^2w &= B_1^3dx^2 + B_2^3dx\,dy + B_3^3dy^2 + B_4^3d^2z.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Но

$$d^2w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}du dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial w}{\partial u}d^2u + \frac{\partial w}{\partial v}d^2v. \tag{13}$$

Дифференциалы, входящие в (13), заменяем соответствующими выражениями (9), (12) и полученное выражение решаем относительно d^2z:

$$d^2z = P\,dx^2 + 2Q\,dx\,dy + R\,dy^2, \tag{14}$$

откуда $r = P$, $s = Q$, $t = R$, где правые части зависят от x, y, z, u, v, w и от производных w по u, v порядков не выше 2. Конечно, в правой части (13) можно исключить x, y, z при помощи (7).

Мы применили метод замены переменных, который естественно называть *методом дифференциалов*. Этим методом можно решить и первую рассматриваемую выше задачу (см. (1), (2)), и тогда надо считать $z = w$.

Пример 1. Выразить оператор Лапласа*) (двумерный)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{15}$$

в полярных координатах. Решим эту задачу методом дифференциалов (хотя ее можно решить и методом 1).

Имеем

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta. \tag{16}$$

---

*) П. С. Лаплас (1749—1827) — французский астроном, математик и физик.

Считая x, y независимыми, дифференцируем (16):

$$dx = \cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta, \quad dy = \sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta.$$

Отсюда $d\rho = \sin\theta dy + \cos\theta dx, \quad d\theta = (-\sin\theta dx + \cos\theta dy)\dfrac{1}{\rho}.$ Далее,

$$d^2\rho = (-\sin\theta dx + \cos\theta dy)\, d\theta = \rho d\theta^2,$$

$$d^2\theta = \frac{1}{\rho}(-\cos\theta dx - \sin\theta dy)\, d\theta - \frac{d\rho}{\rho^2}(-\sin\theta dx + \cos\theta dy) =$$

$$= -\frac{d\rho d\theta}{\rho} - \frac{d\rho d\theta}{\rho} = -2\frac{d\rho d\theta}{\rho}.$$

Подставляя эти выражения в равенство

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}d\theta^2 + \frac{\partial u}{\partial\rho}d^2\rho + \frac{\partial u}{\partial\theta}d^2\theta$$

и приводя подобные при dx^2, $dx\,dy$ и dy^2, получим, в частности, выражения для $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, что дает

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}. \tag{17}$$

Пример 2. Выразить оператор Лапласа (трехмерный)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

в полярных координатах.

Имеем $x = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $y = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $z = \rho\sin\theta$. Введем вспомогательную переменную $r = \rho\cos\theta$. Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ и в силу формулы (17)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Остается в этом выражении сделать подстановку $r = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, $\varphi = \varphi$, в силу которой на основании той же формулы (17)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho},$$

и на основании формулы (4)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\dfrac{D(z,\,u)}{D(\rho,\,\theta)}}{\dfrac{D(r,\,z)}{D(\rho,\,\theta)}} = -\frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}.$$

Поэтому

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho^2\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}. \tag{18}$$

Мы считали, что θ (широта) отсчитывается от экватора сферы ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$). Подстановка $\theta' = (\pi/2) - \theta$ ($\theta < \theta' < \pi$) приводит к отсчету от северного полюса сферы. Тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\theta'^2}$, $\cos\theta' = \sin\theta$, $\sin\theta' = \cos\theta$, $\frac{\partial u}{\partial\theta} = -\frac{\partial u}{\partial\theta'}$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta'} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta'}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}\frac{\partial u}{\partial\theta'}. \tag{18'}$$

Упражнения.

1. Показать, что формула кривизны плоской кривой $y = f(x)$ в полярных координатах ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\left|r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right|}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

2. Показать, что дифференциальное уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ подстановками $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ сводится к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

§ 7.27. Система зависимых функций

Пусть задана система m ($m \leqslant n$) функций

$$y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n) \quad (x \in G;\ j = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

непрерывно дифференцируемых на области G n-мерного пространства.

По определению, *система* (1) *зависима на* G, если по крайней мере одна из функций, например, y_m, выражается через остальные на G при помощи равенства

$$y_m = \Phi(y_1, \ldots, y_{m-1}), \tag{2}$$

где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция от $y_1, \ldots, y_{m-1}$, т. е. (2) есть тождество относительно $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ на G, если в нем положить $y_j = f_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, \ldots, m$). В случае (2) будем еще говорить, что *функция* y_m *зависима от функций* $y_1, \ldots, y_{m-1}$ *на* G.

Теорема 1. *Если система* (1) *зависима на* G, *то все определители* m-*го порядка, порождаемые матрицей*

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix}\right\|, \tag{3}$$

тождественно равны нулю на G.