северного полюса сферы. Тогда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta'^2}$, $\cos\theta' = \sin\theta$, $\sin\theta' = \cos\theta$, $\dfrac{\partial u}{\partial\theta} = -\dfrac{\partial u}{\partial\theta'}$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta'} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta'}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}\frac{\partial u}{\partial\theta'}. \qquad (18')$$

Упражнения.

1. Показать, что формула кривизны плоской кривой $y = f(x)$ в полярных координатах ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\left|r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}\right|}{\left[r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

2. Показать, что дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ подстановками $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ сводится к уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

§ 7.27. Система зависимых функций

Пусть задана система m ($m \leqslant n$) функций

$$y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n) \quad (x \in G;\ j = 1, \ldots, m), \qquad (1)$$

непрерывно дифференцируемых на области G n-мерного пространства.

По определению, *система* (1) *зависима на* G, если по крайней мере одна из функций, например, y_m, выражается через остальные на G при помощи равенства

$$y_m = \Phi(y_1, \ldots, y_{m-1}), \qquad (2)$$

где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция от $y_1, \ldots, y_{m-1}$, т. е. (2) есть тождество относительно $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ на G, если в нем положить $y_j = f_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, \ldots, m$). В случае (2) будем еще говорить, что *функция* y_m *зависима от функций* $y_1, \ldots, y_{m-1}$ *на* G.

Теорема 1. *Если система* (1) *зависима на* G, *то все определители* m-*го порядка, порождаемые матрицей*

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|, \qquad (3)$$

тождественно равны нулю на G.

Действительно, пусть, например, y_m зависит от $y_1, \ldots, y_{m-1}$ при помощи равенства (2). Тогда

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n; \text{ на } G).$$

Поэтому определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (\text{на } G),$$

потому что, если помножить его первые $(m-1)$ строки соответственно на $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ и вычесть полученные строки из m-й строки, то последняя будет состоять из нулей. Аналогично рассуждая, получим, что и любой другой определитель m-го порядка, порождаемый матрицей (3), тождественно равен нулю на G.

Теорема 2. *Пусть все порождаемые матрицей* (3) *определители m-го порядка тождественно равны нулю на G, а s $(s < m)$ есть наибольшее число, для которого в некоторой точке $x^0 \in G$ один из порождаемых матрицей* (3) *определителей не равен нулю. Пусть (не нарушая общности) это будет определитель*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Тогда найдется окрестность $\Omega \subset G$ точки $\mathbf{x}^0$, где система функций $f_1, \ldots, f_s$ не является зависимой, остальные же функции $f_{s+1}, \ldots, f_n$ зависят на Ω от $f_1, \ldots, f_s$:

$$f_\lambda(x) = \Phi_\lambda(f_1(x), \ldots, f_s(x)) \quad (\lambda = s+1, \ldots, m), \tag{5}$$

т. е. существуют непрерывно дифференцируемые функции Φ_λ, для которых на Ω выполняются тождества (5).

Доказательство. Так как, по условию, определитель (4) не равен нулю в точке $\mathbf{x}^0$, то в силу его непрерывности он не равен нулю в некоторой ее окрестности Ω_1, и по теореме 1 система $f_1, \ldots, f_s$ не является зависимой на Ω_1 и на любой содержащейся в Ω_1 окрестности точки $\mathbf{x}^0$.

Далее, в силу того, что определитель (4) на Ω_1 не равен нулю, система

$$y_j - f_j(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, s) \tag{6}$$

разрешима относительно $(x_1, \ldots, x_s)$, точнее, найдется прямоугольник

$$\Delta = \{|x_1 - x_1^0| \leqslant \sigma, \ldots, |x_s - x_s^0| \leqslant \sigma, |x_{s+1} - x_{s+1}^0| \leqslant \delta, \ldots$$
$$\ldots, |x_n - x_n^0| \leqslant \delta, |y_1 - y_1^0| \leqslant \delta, \ldots, |y_s - x_s^0| \leqslant \delta\},$$

и можно определить непрерывно дифференцируемые функции (единственные)

$$x_j = \mu_j(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) \quad (j = 1, \ldots, s) \tag{7}$$

на

$$\Delta' = \{|x_{s+1} - x_{s+1}^0| \leqslant \delta, \ldots, |x_n - x_n^0| \leqslant \delta, |y_1 - y_1^0| \leqslant \delta, \ldots$$
$$\ldots, |y_s - y_s^0| \leqslant \delta\}, \tag{8}$$

обращающие равенства (6) в тождества относительно $(x_{s+1}, \ldots$ $\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s)$:

$$y_j - f_j(\mu_1, \ldots, \mu_s, x_{s+1}, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, s) \tag{9}$$

и так, что $|\mu_j - x_j^0| \leqslant \sigma$ $(j = 1, \ldots, s)$. При этом прямоугольник

$$\Delta'' = \{|x_1 - x_1^0| \leqslant \sigma, \ldots, |x_s - x_s^0| \leqslant \sigma, |x_s - x_{s+1}| \leqslant \delta, \ldots$$
$$\ldots, |x_n - x_n^0| \leqslant \delta\}$$

принадлежит Ω_1. Мало того, если какая-либо точка $(x_1, \ldots, x_n,$ $y_1, \ldots, y_s) \in \Delta$ удовлетворяет системе (6), то ее координаты связаны равенствами (7) (это и есть единственность).

Нам будет удобно ввести векторы ($k > s$ — натуральное)

$$\mathbf{a}^{(l)} = \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_l}{\partial x_s}, \frac{\partial f_l}{\partial x_k}\right) \quad (x \in \Delta''), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial \mu_s}{\partial x_k}, 1\right).$$

Дифференцируя (9) по x_k, получим

$$\mathbf{a}^{(j)}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \equiv 0 \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{10}$$

Подставив μ_i в f_λ, $\lambda = (s+1, \ldots, n)$, получим функции

$$f_\lambda(\mu_1, \ldots, \mu_s, x_{s+1}, \ldots, x_n), \tag{11}$$

зависящее (*a priori*) от $x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s$. Однако на самом деле они зависят только от $y_1, \ldots, y_s$. Докажем это. Полные производные от них по x_k равны

$$\mathbf{a}^{(\lambda)}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}. \tag{12}$$

Но, по условию, определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_s} & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

в то время как его минор s-го порядка, находящийся в верхнем левом углу, не равен нулю на Ω_1; поэтому вектор $\mathbf{a}^{(\lambda)}$ есть некоторая линейная комбинация из векторов $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(s)}$. Но в силу (10) последние ортогональны к b; тогда и вектор $\mathbf{a}^{(\lambda)}$ ортогонален к $\mathbf{b}$, т. е. выражение (12) тождественно равно нулю на Δ'. Мы показали, что при $\lambda > s$ и $k > s$ полная производная от функций (11) по x_k тождественно равна нулю на Δ', т. е. они на самом деле не зависят от $x_{s+1}, \ldots, x_n$. Поэтому

$$f_\lambda(\mu_1, \ldots, \mu_s, x_{s+1}, \ldots, x_n) = \Phi_\lambda(y_1, \ldots, y_s) \quad (\lambda = s+1, \ldots, n), \tag{13}$$

где Φ_λ — непрерывно дифференцируемые функции от $y_1, \ldots, y_s$. Определим теперь, пользуясь непрерывностью функций $f_j(x)$ для указанных выше δ, σ, такое $\delta_1 < \delta, \sigma$, что коль скоро

$$|x_j - x_j^0| < \delta_1 \quad (\delta_1 < \delta, \sigma), \tag{14}$$

имеет место

$$|f_j(x) - f_j(x^0)| < \delta \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{15}$$

Но тогда для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащих кубу (14), который мы обозначим через Ω, имеет место (пояснения ниже)

$$f_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = f_\lambda(\mu_1, \ldots, \mu_s, x_{s+1}, \ldots, x_n) = \\ = \Phi_\lambda(y_1, \ldots, y_s) = \Phi_\lambda(f_1(x), \ldots, f_s(x)), \tag{16}$$

т. е. y_λ зависит на Ω от $y_1, \ldots, y_s$.

Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ точки $(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) \in \Delta'$ $(y_j = f_j(\mathbf{x})$, см. (8)), поэтому

$$x_j = \mu_j(x_{s+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) \quad (j = 1, \ldots, s),$$

что доказывает первое равенство цепи (16); второе равенство следует из (13), третье сводится к обратной замене y_j на $f_j(\mathbf{x})$.