Пусть $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ $(\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0)$; тогда

$$\lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} (f(\mathbf{x}^k)\varphi(\mathbf{x}^k)) = \lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^k) \lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}^k) =$$
$$= \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}). \qquad (9)$$

Таким образом, предел в левой части (9) существует и равен правой части (9), а так как последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ призвольна, то он равен пределу функции $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$.

Теорема 1. *Если функция f имеет предел, не равный нулю в точке* $\mathbf{x}^0$,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = A \neq 0,$$

то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{x}$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta, \qquad (10)$$

она удовлетворяет неравенству

$$|f(\mathbf{x})| > |A|/2. \qquad (11)$$

Больше того, она сохраняет там знак A.

В самом деле, положив $\varepsilon = |A|/2$, найдем $\delta > 0$ такое, чтобы для $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам (10), выполнялось

$$|f(\mathbf{x}) - A| < |A|/2. \qquad (12)$$

Поэтому для таких $\mathbf{x}$ $|A|/2 > |A - f(\mathbf{x})| \geqslant |A| - |f(\mathbf{x})|$, т. е. имеет место (11).

Из (12) для указанных $\mathbf{x}$ следует:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(\mathbf{x}) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда $A/2 < f(\mathbf{x})$ при $A > 0$ и $f(\mathbf{x}) < A/2$ при $A < 0$ (сохранение знака).

Замечание. В § 7.10 будет дано более общее определение предела функции, заданной на произвольном множестве.

§ 7.3. Непрерывная функция

По определению, функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе и в самой точке $\mathbf{x}^0$, и если предел ее в точке $\mathbf{x}^0$ равен ее значению в ней:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0). \qquad (1)$$

Условие непрерывности f в точке $\mathbf{x}^0$ можно написать в эквивалентной форме:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^0), \tag{1'}$$

т. е. функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0$, если непрерывна функция $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h})$ от $\mathbf{h}$ в точке $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Можно ввести приращение f в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующее приращению $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$,

$$\Delta_h f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0),$$

и на его языке определить непрерывность f в $\mathbf{x}^0$: *функция f непрерывна в x^0, если*

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0) = \lim_{h_1,\ldots,h_n\to 0} \left[f\left(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)\right] = 0. \tag{1''}$$

Из формул (6)—(8) § 7.2 непосредственно следует

Теорема 1. *Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке $\mathbf{x}^0$ функций $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ есть непрерывная функция в этой точке, если, конечно, в случае частного* $\varphi(\mathbf{x}^0) \neq 0$.

Постоянную c можно рассматривать как функцию $f(\mathbf{x}) = c$ от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Она непрерывна для любого $\mathbf{x}$, потому что

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = c - c = 0 \to 0 \quad (\mathbf{h} \to \mathbf{0}).$$

Следующей по сложности является функция $f_j(\mathbf{x}) = x_j$ ($j = 1, \ldots, n$), где индекс j может равняться одному из значений $1, \ldots, n$. Она также непрерывна (как функция от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$!). Действительно, пусть $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$; тогда

$$|f_j(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{x})| = |(x_j + h_j) - x_j| = |h_j| \leqslant |\mathbf{h}| \to 0 \quad (\mathbf{h} \to \mathbf{0}).$$

Если производить над функциями x_j и постоянными действия сложения, вычитания и умножения в конечном числе, то будем получать функции, называемые *многочленами от* $\mathbf{x}$ *или* $(x_1, \ldots, x_n)$. На основании сформулированных выше свойств *многочлены суть непрерывные функции на R_n* (для всех $\mathbf{x} \in R_n$). Отношение P/Q двух многочленов есть *рациональная функция*, очевидно, непрерывная всюду на R_n, за исключением точек $\mathbf{x}$, где $Q(\mathbf{x}) = 0$.

Функция

$$P(\mathbf{x}) = x_1^3 - x_2^3 + x_1^2 x_3 + 2x_1^2 x_2 - 3x_3^2 + 4$$

может служить примером многочлена от (x_1, x_2, x_3) третьей степени.

Вообще, имеет место очевидная

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_m)$ — непрерывная функция в точке $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ пространства R_m и $m < n$.*

Если ее рассматривать как функцию

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то F непрерывна относительно $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (в пространстве R_n) в любой точке вида $(x_1^0, \ldots, x_m^0, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$, где числа $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$ произвольны.

В самом деле, если $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, то

$$\Delta_h F(\mathbf{x}^0) = F(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n) - F(x_1^0, \ldots, x_n^0) =$$
$$= f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_m^0 + h_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0) \to 0 \quad (\mathbf{h} \to \mathbf{0}).$$

Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ есть целый неотрицательный вектор, т. е. имеющий неотрицательные целые компоненты k_j $(j = 1, \ldots, n)$. Если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка R_n, то условимся о следующем обозначении:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}. \tag{2}$$

Эта функция непрерывна для всех $\mathbf{x} \in R_n$, потому что она есть произведение из конечного числа множителей вида x_j, каждый из которых есть непрерывная функция от $\mathbf{x}$. Введем еще новое обозначение

$$|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^{n} k_j, \tag{3}$$

которое употребляют для целых неотрицательных векторов $\mathbf{k}$ и которое не надо путать с $|\mathbf{k}| = \left(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\right)^{1/2}$ Составим сумму

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

распространенную на всевозможные векторы $\mathbf{k}$ с $|\mathbf{k}| \leqslant N$, где $a_{\mathbf{k}} = a_{k_1, \ldots, k_n}$ — постоянные коэффициенты, снабженные целочисленными векторными индексами $\mathbf{k}$. Эта функция (очевидно непрерывная) называется многочленом от $\mathbf{x}$ степени N.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ пространства R_m (точек $\mathbf{x}$), а функции $\varphi_j(\mathbf{u}) = \varphi_j(u_1, \ldots, u_n)$ непрерывна в точке $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0)$ пространства R_n (точек $\mathbf{u}$). Пусть, кроме того, $\varphi_j(\mathbf{u}^0) = x_j^0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда функция*

$$F(\mathbf{u}) = f(\varphi_1(\mathbf{u}), \varphi_2(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{u}))$$

непрерывна (по $\mathbf{u}$) в точке $\mathbf{u}^0$.

Доказательство. Так как f непрерывна в $\mathbf{x}^0$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что f определена для всех

$\mathbf{x}$, для которых $|x_j - x_j^0| < \delta$ $(j = 1, \ldots, m)$, и для них выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon$, и так как функции φ_j непрерывны в точке $\mathbf{u}^0$ пространства R_n, то можно определить такое $\eta > 0$, что для точек $\mathbf{u} \in R_n$ шара $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0| < \eta$ выполняются неравенства

$$|\varphi_j(\mathbf{u}) - \varphi_j(\mathbf{u}^0)| < \delta \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Тогда выполняется также неравенство

$$|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}^0)| = |f(\varphi_1(\mathbf{u}), \ \ldots, \ \varphi_n(\mathbf{u})) - f(\varphi_1(\mathbf{u}^0), \ \ldots, \ \varphi_m(\mathbf{u}^0))| < \varepsilon,$$

и теорема доказана.

Функцию мы будем называть *элементарной функцией* от переменных $x_1, \ldots, x_n$, если она может быть получена из этих переменных и констант c при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и операций φ, где φ — элементарные функции от одной переменной (см. § 1.3). Функции

1) $\sin \ln \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \varphi_1$,
2) $\sin^2 x + \cos 3(x + y) = \varphi_2$,
3) $\ln \dfrac{x - y}{x + y} = \varphi_3$

могут служить примерами элементарных функций.

Легко проверить, пользуясь теоремами 1—3, что функции φ_1 и φ_2 непрерывны на плоскости (x, y), функция же φ_3, очевидно, определена и непрерывна в тех точках (x, y), для которых дробь $(x - y)/(x + y)$ положительна и конечна.

Из теоремы 1 § 7.2 и определения непрерывности функции в точке непосредственно следует

Теорема 4. *Функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывная в точке $\mathbf{x}^0$ и неравная нулю в этой точке, сохраняет знак $f(\mathbf{x}^0)$ в некоторой окрестности этой точки.*

Следствие. *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна на R_n (во всех точках R_n). Тогда множество G точек $\mathbf{x}$, где она удовлетворяет неравенству $f(x) > c$ (или $f(\mathbf{x}) < c$), какова бы ни была постоянная c, есть открытое множество.*

В самом деле, функция $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - c$ непрерывна на R_n, и множество всех точек $\mathbf{x}$, где $F(\mathbf{x}) > 0$, совпадает с G. Пусть $\mathbf{x}^0 \in G$; тогда существует шар

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta,$$

на котором $F(\mathbf{x}) > 0$, т. е. он принадлежит к G и точка $\mathbf{x}^0 \in G$ — внутренняя для G.

Случай $f(\mathbf{x}) < c$ доказывается аналогично.

Пример.

1) $f_1(\mathbf{x}) = \sum\limits_1^n \dfrac{x_k^2}{a_k} \quad (a_k > 0)$;

2) $f_2(\mathbf{x}) = \sum\limits_1^n |x_k|$;

3) $f_3(\mathbf{x}) = \max\limits_k |x_k|$.

Эти три функции определены и непрерывны на R_n. Непрерывность f_3 вытекает из следующих выкладок:

$$|f_3(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f_3(\mathbf{x})| = |\max_k |x_k+h_k| - \max_k |x_k|| \leqslant$$
$$\leqslant \max_k |x_k+h_k-x_k| = \max_k |h_k| \to 0 \quad (|\mathbf{h}| \to 0).$$

В таком случае множества значений $\mathbf{x}$, для которых выполняются неравенства $f_i(\mathbf{x}) < c$ $(i = 1, 2, 3)$,— открытые множества. Первое из них есть внутренность эллипсоида в n-мерном пространстве; второе и третье при $n = 2$ суть внутренности квадратов, изображенных соответственно на рис. 7.2 и 7.3.

Эти три множества выпуклые, потому что из неравенств $f_i(x) < c$ и $f_i(y) < c$ следует $f_i(tx + (1-t)y) < c$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Неравенства $f_i(x) > c > 0$ определяют внешности указанных фигур.

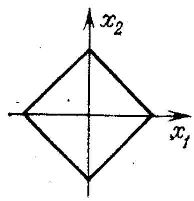

Рис. 7.2.

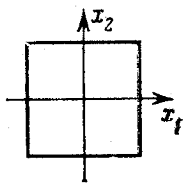

Рис. 7.3.

§ 7.4. Частные производные и производная по направлению

В этом параграфе мы будем рассматривать функции f, определенные на произвольном открытом множестве $G \subset R_n$.

Назовем *приращением* f *в точке* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $(\in G)$ *по переменной* x_j *с шагом* h *величину*

$$\Delta_{x_j h} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n),$$

где h — действительное число, достаточно малое, чтобы эта величина имела смысл.

Частной производной по x_j *в точке* $\mathbf{x}$ называется предел

$$f'_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{x_j h} f(\mathbf{x})}{h} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

если он существует. Частная производная $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ есть обычная производная от функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемой как функция только от переменной x_j при фиксированных $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

Функция $z = f(x, y)$ от двух переменных изображается в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), поверхностью — геометрическим местом точек $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in G$. Очевидно, что *величина* $f'_x(x_0, y_0)$