2) $f_2(\mathbf{x}) = \sum_{1}^{n} |\mathbf{x_k}|$;

3) $f_3(\mathbf{x}) = \max_k |\mathbf{x_k}|$.

Эти три функции определены и непрерывны на R_n. Непрерывность f_3 вытекает из следующих выкладок:

$$|f_3(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f_3(\mathbf{x})| = |\max_k |x_k+h_k| - \max_k |x_k|| \leqslant$$
$$\leqslant \max_k |x_k+h_k-x_k| = \max_k |h_k| \to 0 \quad (|\mathbf{h}|\to 0).$$

В таком случае множества значений $\mathbf{x}$, для которых выполняются неравенства $f_i(\mathbf{x}) < c$ $(i = 1, 2, 3)$,— открытые множества. Первое из них есть внутренность эллипсоида в n-мерном пространстве; второе и третье при $n = 2$ суть внутренности квадратов, изображенных соответственно на рис. 7.2 и 7.3.

Эти три множества выпуклые, потому что из неравенств $f_i(x) < c$ и $f_i(y) < c$ следует $f_i(tx+(1-t)y) < c$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Неравенства $f_i(x) > c > 0$ определяют внешности указанных фигур.

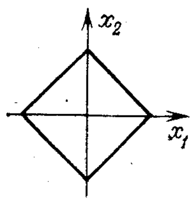

Рис. 7.2.

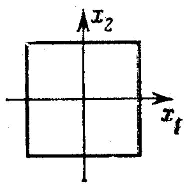

Рис. 7.3.

§ 7.4. Частные производные и производная по направлению

В этом параграфе мы будем рассматривать функции f, определенные на произвольном открытом множестве $G \subset R_n$.

Назовем *приращением* f *в точке* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $(\in G)$ *по переменной* x_j *с шагом* h *величину*

$$\Delta_{x_j h} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j+h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n),$$

где h — действительное число, достаточно малое, чтобы эта величина имела смысл.

Частной производной по x_j *в точке* $\mathbf{x}$ называется предел

$$f'_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{x_j h} f(\mathbf{x})}{h} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

если он существует. Частная производная $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ есть обычная производная от функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемой как функция только от переменной x_j при фиксированных $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

Функция $z = f(x, y)$ от двух переменных изображается в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), поверхностью — геометрическим местом точек $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in G$. Очевидно, что *величина* $f'_x(x_0, y_0)$

(если она существует) *равна тангенсу наклона к оси* x, *касательной к сечению этой поверхности плоскостью* $y = y_0$ *в точке, имеющей абсциссу* x_0.

Производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(i = 1, \ldots, n)$ называют также *частными производными первого порядка от* f.

Выражения $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ называют *частными производными второго порядка.* При $i = j$ их принято обозначать так:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Выражения $\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}$ называют *частными производными третьего порядка*, и т. д. Широко пользуются обозначениями, такими как приведенные ниже:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}}_{m\ \text{раз}} = \frac{\partial^m}{\partial x_k^m}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^6}{\partial z\, \partial y^2 \partial z^2 \partial x}$$

Мы увидим в дальнейшем, что во многих важных случаях эти операции частного дифференцирования законно менять местами без изменения результата.

Можно еще ввести понятие *производной по направлению.* В случае функций от одной переменной оно не употребляется.

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ есть произвольный единичный вектор. *Производной от функции* f *в точке* $\mathbf{x}$ *по направлению* $\boldsymbol{\omega}$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\omega}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

(если он существует). Подчеркнем, что при вычислении этого предела предполагается, что t стремится к нулю, принимая *положительные* значения, поэтому можно еще сказать, что $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ *есть правая производная в точке* $t = 0$ *от функции* $f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} t)$ по t.

Можно, как в случае функций от одной переменной, говорить о правой и левой частной производной по x_j. Надо учесть, что *производная по направлению положительной оси* x_j *совпадает с правой частной производной по* x_j, *однако производная по направлению отрицательной оси* x_j *имеет знак, противоположный знаку левой производной по* x_j.