Аналогично, полагая в (16) $x = x_0$, деля на $y - y_0$ и переходя к пределу при $y \to y_0$, получим

$$B - C\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Но тогда $C \neq 0$, потому что иначе было бы $A = B = C = 0$, и, следовательно, наша плоскость имеет вид (13).

Пример 2. Функция ($\alpha > 0$)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{(1+\alpha)/2} & \text{в рациональных точках,} \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

очевидно, разрывна в любой точке, отличной от нулевой, в нулевой же точке она дифференцируема:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = 0x + 0y + \rho^{1+\alpha},$$

где $\rho^{1+\alpha} = o(\rho)$ $(\rho \to 0)$. Таким образом, f есть пример функции, дифференцируемой в точке, но не имеющей непрерывных частных производных в этой точке.

Примеры 1 и 2 показывают, что свойство функции быть дифференцируемой в точке слабее свойства иметь непрерывные частные производные в точке, но сильнее свойства иметь частные производные в точке.

§ 7.6. Производная сложной функции; производная по направлению; градиент

Ограничимся рассмотрением функции трех переменных, определенной на открытом множестве $G \subset R_3$. Распространение излагаемых здесь фактов на n-мерный случай производится аналогично.

Теорема 1. *Пусть функция*

$$u = f(x, y, z) \tag{1}$$

дифференцируема в точке $(x, y, z) \in G$, *а функции*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{2}$$

зависящие от скалярного параметра t, *имеют производную в* t. *Тогда производная по* t *от сложной функции (производная от* f *вдоль кривой* (2)) $u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ *вычисляется по формуле*

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\psi'(t) + \\ + f'_z(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\chi'(t),$$

или, короче:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

В самом деле, вследствие дифференцируемости f в (x, y, z) каково бы ни было достаточно малое приращение $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$,

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho) \quad \left(\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2} \to 0\right). \tag{4}$$

Значению t, которому при помощи равенств (2) соответствует точка (x, y, z), придадим приращение Δt. Оно вызовет приращения Δx, Δy, Δz функций (2). Если именно их подставить в (4), то получим приращение $F(t+\Delta t) - F(t) = \Delta u$ функции F в точке t. После деления (4) на Δt и перехода к пределу получим

$$F'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}\right) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

т. е. (3), потому что функции (2) имеют производные, а

$$\frac{o(\rho)}{\Delta t} = \varepsilon(\rho)\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z^2}{\Delta t}\right)} \to \\ \to 0\cdot\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = 0 \quad (\Delta t \to 0)$$

($\Delta t \to 0$ влечет $\rho \to 0$).

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), то для нее имеет смысл производная по направлению любого единичного вектора* $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, *выражаемая формулой*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно определения производной по направлению (см. § 7.4) и в силу предыдущей теоремы

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta, z+t\cos\gamma) - f(x, y, z)}{t} = \\ = \left[\frac{d}{dt} f(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta, z+t\cos\gamma)\right]_{t=0} = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

где частные производные взяты в (x, y, z).

Если $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ — уравнение гладкой кривой Γ, где параметр s — длина дуги, то величины

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s), \quad \frac{dy}{ds} = \psi'(s), \quad \frac{dz}{ds} = \chi'(s)$$

суть направляющие косинусы вектора касательной к Г. Поэтому величина

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(s)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(s)+\frac{\partial f}{\partial z}\chi'(s)=\frac{d}{ds}f(\varphi(s),\psi(s),\chi(s)),$$

где f — дифференцируемая функция, есть производная по направлению указанного касательного вектора. Говорят еще, что $\frac{\partial f}{\partial s}$ есть производная от f вдоль Г.

Введем вектор

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{6}$$

называемый *градиентом* функции f в точке (x, y, z).

Плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярная к градиенту f в этой точке, если он не равен нулю, имеет уравнение

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0(z-z_0)=0. \tag{7}$$

Эта плоскость замечательна тем, что ее можно (в силу (5)) рассматривать как геометрическое место выходящих из (x_0, y_0, z_0) лучей, вдоль которых производная от f равна нулю. В § 7.19 будет доказано, что эта плоскость есть касательная плоскость в (x_0, y_0, z_0) к поверхности, определяемой уравнением

$$f(x, y, z)=A \quad (A=f(x_0, y_0, z_0)). \tag{8}$$

Формула (5) говорит, что *производная от f в точке (x, y, z) по направлению единичного вектора* $\mathbf{n}$ *равна проекции градиента f в этой точке на направление* $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}=(\operatorname{grad} f, \mathbf{n})=\operatorname{grad}_{\mathbf{n}} f. \tag{9}$$

Имеет место очевидное неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\leqslant|\operatorname{grad} f| \tag{10}$$

для любого вектора $\mathbf{n}$. Если $\operatorname{grad} f=\mathbf{0}$, что обычно бывает только в исключительных точках, то $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}=0$ для любого вектора $\mathbf{n}$. Если же $\operatorname{grad} f\neq\mathbf{0}$ (одна из частных производных от f не равна нулю), то (10) есть строгое неравенство для всех единичных векторов $\mathbf{n}$, за исключением единственного вектора $\mathbf{n}_0=(\cos\alpha_0,$

$\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$), направленного в сторону $\operatorname{grad} f$. Таким образом,

$$\cos\alpha_0=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},\quad \cos\gamma_0=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \tag{11}$$

Из сказанного следует, что *градиент функции f в точке (x, y, z) можно определить как вектор, обладающий следующими двумя свойствами:*

1) *длина его равна максимальной величине производной по направлению* $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ в (x, y, z) (для дифференцируемой в (x, y, z) функции этот максимум существует и есть число неотрицательное);

2) *если его длина не равна нулю, то он направлен в ту же сторону, что и вектор* $\mathbf{n}$, *вдоль которого производная* $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ *максимальна.*

Это новое определение градиента полностью эквивалентно его формальному определению при помощи формулы (6). Оно показывает, что $\operatorname{grad} f$ есть инвариант, т. е. он может быть определен независимо от системы координат, в которой рассматривается функция f от точки (см. (1)). Чтобы пояснить эти слова, рассмотрим физический пример. Будем считать, что G есть физическое тело, а $u=u(P)$ есть температура переменной его точки P, вообще меняющаяся от точки к точке. Если в пространстве ввести прямоугольную систему координат (x, y, z), то физическая функция $u=u(P)$ может быть заменена на математическую $u=f(x, y, z)$, где (x, y, z) — прямоугольные координаты точек $P\in G$. В другой прямоугольной системе (x', y', z') наша физическая функция будет описываться, вообще говоря, другой математической функцией

$$u=f_1(x', y', z')=$$
$$=f(\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha_3z',\ \beta_1x'+\beta_2y'+\beta_3z',\ \gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma_3z'), \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} x&=\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha_3z',\\ y&=\beta_1x'+\beta_2y'+\beta_3z',\\ z&=\gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma_3z' \end{aligned} \tag{13}$$

— формулы преобразования координат.

Градиент нашей физической функции $u = u(P)$ естественно определить в духе второго приведенного выше определения. Это есть вектор, по направлению которого температура в данной точке P возрастает быстрее всего, длина же его равна максимальной скорости возрастания температуры среди скоростей, соответствующих разным направлениям.

Мы знаем, что если функция f, описывающая нашу физическую функцию, в системе (x, y, z) дифференцируема в точке $P = (x, y, z)$, для нее имеет смысл градиент в этой точке, определяемый тройкой чисел

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{14}$$

Во второй системе координат (x', y', z') он задается другой тройкой:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x'}, \frac{\partial f_1}{\partial y'}, \frac{\partial f_1}{\partial z'}\right). \tag{15}$$

Таким образом, мы из чисто физических соображений доказали, что если некоторый вектор в прямоугольной системе координат (x, y, z) задан тройкой чисел (14), то при условии дифференцируемости f в (x, y, z) он в новой системе (x', y', z') задается тройкой (15), где f_1 определяется формулами (12), (13). Но этот факт можно доказать и формально.

В самом деле, вектор (14) согласно формулам, известным из аналитической геометрии, в новой системе (x', y', z') имеет компоненты

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial x'},\\ \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial y'},\\ \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial z'}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Тот факт, что эти компоненты равны соответственно $\frac{\partial f_1}{\partial x'}, \frac{\partial f_1}{\partial y'}, \frac{\partial f_1}{\partial z'}$, вытекает из теоремы 1 о производной сложной функции. Надо иметь в виду при применении этой теоремы, что обычную производную по t, очевидно, всюду можно заменить на частную производную по t.

Градиент f еще записывают так:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \tag{17}$$

где ∇ — оператор*), который каждой дифференцируемой в

*) Знак ∇ напоминает арфу, греческое название которой — $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ (набла).

(x, y, z) функции f приводит в соответствие вектор — $\operatorname{grad} f$. Этот оператор называется *оператором Гамильтона или оператором набла.* Его удобно считать символическим вектором

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{18}$$

и рассматривать $\operatorname{grad} f$ как символическое произведение вектора ∇ на скаляр f.

При физическом подходе к функции как к некоторой величине u, зависящей от точки пространства, формулы (16) естественно записать следующим образом (не вводя функций f и f_1 для разных систем координат):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x'}, \\ \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial y'}, \\ \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z'}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

В формальной теории векторов *вектором* (трехмерным) называется вещь, обозначаемая символом $\mathbf{a}$ и выражаемая в каждой прямоугольной системе координат (x, y, z) тройкой чисел $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ — компонент $\mathbf{a}$ в системе (x, y, z). При этом компоненты вектора $\mathbf{a}$ в любой другой прямоугольной системе координат (x', y', z'), $\mathbf{a} = (a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$, получаются из (a_x, a_y, a_z) при помощи преобразований

$$a_{x'} = \alpha_1 a_x + \beta_1 a_y + \gamma_1 a_z, \quad a_{y'} = \alpha_2 a_x + \beta_2 a_y + \gamma_2 a_z,$$
$$a_{z'} = \alpha_3 a_x + \beta_3 a_y + \gamma_3 a_z,$$

аналогичных преобразованиям координат (x, y, z) в (x', y', z'):

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \quad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \quad z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.$$

Формулы (19) дают, таким образом, формальное доказательство того факта, что $\operatorname{grad} f$ есть вектор.

Отсюда уже нетрудно сделать следующий формальный шаг. Будем считать, что оператор ∇ есть вектор (символический), имеющий в прямоугольной системе (x, y, z) компоненты $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, а в произвольной другой прямоугольной системе (x', y', z') — компоненты $\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right)$. При этом новые компоненты выражаются через старые при помощи (символических) равенств

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

т. е. так, как если бы символический оператор ∇ был реальным вектором. Если помножить (символически) левые и правые части (20) на скаляр u (дифференцируемую функцию), то мы получим известное уже нам равенство (19) между частными производными от функции от u.

Таким образом, если заданы компоненты градиента f в системе (x, y, z) и нужно вычислить его компоненты в системе (x', y', z'), можно поступить так. Считаем, что $\operatorname{grad} f = \nabla f$ есть произведение вектора ∇ на скаляр f, находим компоненты ∇ в системе (x', y', z') по формулам (20), а затем умножаем их на скаляр f. Иначе говоря, при преобразовании вектора ∇f к новым координатам применяются те же операции, как если бы ∇ был обычным вектором, а f — помноженным на него числом (скаляром).

Пример 1. Пусть $f(r) = F(Q)$ есть функция от расстояния $r = r(P, Q)$ между фиксированной точкой $P(x_0, y_0, z_0)$ и переменной точкой $Q = (x, y, z)$;

$$\operatorname{grad} F = \left(f'(r)\frac{x - x_0}{r},\ f'(r)\frac{y - y_0}{r},\ f'(r)\frac{z - z_0}{r}\right)$$

есть вектор, имеющий направление вектора PQ и длину $|\operatorname{grad} F| = |f'(r)|$. Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = |f'(r)| \cos(PQ, \mathbf{n}).$$

В частности, если $F(Q) = f(r) = \ln(1/r)$, то

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\cos(PQ, \mathbf{n})}{r}.$$

Пример 2. Функции

$$(\nabla u, \nabla u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \tag{21}$$

$$\Delta u = \nabla\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{22}$$

инвариантны относительно преобразований прямоугольных систем координат, потому что $\nabla u = \operatorname{grad} u$ — вектор (инвариант), левая часть (21) есть квадрат его длины (скалярное произведение вектора на самого себя), а $\nabla\nabla$ есть символический инвариант (скалярное произведение символического вектора ∇ на самого себя), умноженный на скаляр.

§ 7.7. Независимость от порядка дифференцирования

Теорема 1. *Пусть на открытом плоском множестве G задана функция $f(x, y)$. Если она имеет в точке (x, y) непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, то они равны между собой в этой точке:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \tag{1}$$

В самом деле,

$$\Delta_{xh}\Delta_{yh} f = \Delta_{xh}[f(x, y + h) - f(x, y)] = f(x + h, y + h) - \\ - f(x + h, y) - f(x, y + h) + f(x, y) = \Delta_{yh}\Delta_{xh} f. \tag{2}$$