т. е. так, как если бы символический оператор ∇ был реальным вектором. Если помножить (символически) левые и правые части (20) на скаляр u (дифференцируемую функцию), то мы получим известное уже нам равенство (19) между частными производными от функции от u.

Таким образом, если заданы компоненты градиента f в системе (x, y, z) и нужно вычислить его компоненты в системе (x', y', z'), можно поступить так. Считаем, что $\operatorname{grad} f = \nabla f$ есть произведение вектора ∇ на скаляр f, находим компоненты ∇ в системе (x', y', z') по формулам (20), а затем умножаем их на скаляр f. Иначе говоря, при преобразовании вектора ∇f к новым координатам применяются те же операции, как если бы ∇ был обычным вектором, а f — помноженным на него числом (скаляром).

Пример 1. Пусть $f(r) = F(Q)$ есть функция от расстояния $r = r(P, Q)$ между фиксированной точкой $P(x_0, y_0, z_0)$ и переменной точкой $Q = (x, y, z)$;

$$\operatorname{grad} F = \left(f'(r)\frac{x - x_0}{r},\ f'(r)\frac{y - y_0}{r},\ f'(r)\frac{z - z_0}{r}\right)$$

есть вектор, имеющий направление вектора PQ и длину $|\operatorname{grad} F| = |f'(r)|$. Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = |f'(r)|\cos(PQ, \mathbf{n}).$$

В частности, если $F(Q) = f(r) = \ln(1/r)$, то

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\cos(PQ, \mathbf{n})}{r}.$$

Пример 2. Функции

$$(\nabla u, \nabla u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \tag{21}$$

$$\Delta u = \nabla\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{22}$$

инвариантны относительно преобразований прямоугольных систем координат, потому что $\nabla u = \operatorname{grad} u$ — вектор (инвариант), левая часть (21) есть квадрат его длины (скалярное произведение вектора на самого себя), а $\nabla\nabla$ есть символический инвариант (скалярное произведение символического вектора ∇ на самого себя), умноженный на скаляр.

§ 7.7. Независимость от порядка дифференцирования

Теорема 1. *Пусть на открытом плоском множестве G задана функция $f(x, y)$. Если она имеет в точке (x, y) непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, то они равны между собой в этой точке:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \tag{1}$$

В самом деле,

$$\Delta_{xh}\Delta_{yh} f = \Delta_{xh}[f(x, y + h) - f(x, y)] = f(x + h, y + h) - \\ - f(x + h, y) - f(x, y + h) + f(x, y) = \Delta_{yh}\Delta_{xh} f. \tag{2}$$

Далее (пояснения ниже),

$$\Delta_{yh}\Delta_{xh}f = \Delta_{yh}[f(x+h, y) - f(x, y)] = h[f'_y(x+h, y+\theta h) - f'_y(x, y+\theta h)] = h^2 f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta h) = h^2[f''_{xy}(x, y) + \varepsilon] \quad (\varepsilon \to 0 \text{ при } h \to 0). \tag{3}$$

Так как производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ непрерывна в точке (x, y), то тем самым она существует в достаточно малой окрестности этой точки и автоматически в этой окрестности существует $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$. При достаточно малом h мы не выходим из этой окрестности и законно, как это сделано во втором равенстве (3), применить теорему о среднем по y к функции $[f(x+h, y) - f(x, y)]$. Предпоследнее равенство есть применение этой же теоремы по x к f'_y, что законно, потому что в указанной окрестности существует частная производная $\frac{\partial f'_y}{\partial x} = f''_{xy}$. Последнее равенство, где отмечается, что $\varepsilon \to 0$ при $h \to 0$, выражает, что производная f''_{xy} в точке (x, y) непрерывна. Из (3) следует, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{yh}\Delta_{xh}f}{h^2} = f''_{xy}(x, y).$$

Аналогично, пользуясь непрерывностью f''_{yx}, доказывается равенство

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{xh}\Delta_{yh}f}{h^2} = f''_{yx}(x, y),$$

и так как $\Delta_{xh}\Delta_{yh} = \Delta_{yh}\Delta_{xh}f$ при любых h, то верно и (1).

Заметим, что непрерывность обеих входящих в (1) частных производных есть только достаточное условие для выполнения равенства (1). В литературе известны и менее ограничительные накладываемые на f условия, влекущие за собой это равенство, но очень редко приходится их применять.

Пусть дан целочисленный неотрицательный вектор $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ $(k_j \geqslant 0)$. Будем говорить, что частная производная подчинена вектору $\mathbf{k}$, если каково бы ни было $j = 1, \ldots, n$, при ее вычислении применяется операция $\frac{\partial}{\partial x_j}$ не больше, чем k_j раз. Если, в частности, $k_j = 0$, то операция $\frac{\partial}{\partial x_j}$ не применяется. Теперь мы можем высказать теорему.

Теорема 2. *Если все подчиненные вектору* $\mathbf{k}$ *частные производные от функции* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывны (в* R_n*) в точке* $\mathbf{x}$, *то в любой из них можно переставить порядок дифференцирования как угодно, не изменяя результата.*

Доказательство этой теоремы во всей ее общности потребовало бы хотя и простой, но громоздкой индукции. Мы ограничимся только примером. Производная $\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y}$ подчинена, очевидно, вектору (1, 1, 2). В предположении, что не только она, но и все частные производные от f, подчиненные этому вектору, непрерывны по (x, y, z), мы можем, пользуясь всякий раз либо определением частной производной либо теоремой 1, получить равенства

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}.$$

Например, во втором равенстве мы рассуждаем так: частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, по условию, непрерывны относительно (x, y, z), тем более они непрерывны при фиксированном x относительно (y, z), поэтому они равны. В пятом равенстве это же рассуждение проводится для $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Упражнение. Показать, что функция

$$v = \frac{1}{8\pi^{3/2}(t_0 - t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}},$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

называемая фундаментальным решением уравнения теплопроводности, удовлетворяет дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\Delta_0 v - \frac{\Delta v}{\partial t_0} = 0, \quad \Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right).$$

§ 7.8. Дифференциал функции. Дифференциал высшего порядка

Рассмотрим функцию

$$W = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

заданную на некотором открытом множестве $G \subset R_n$. Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$W = \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, \ldots, u_m), \tag{2}$$

где

$$u_j = \psi_j(\mathbf{x}) \quad (j = 1, \ldots, m;\ \mathbf{x} \in G). \tag{3}$$