Доказательство этой теоремы во всей ее общности потребовало бы хотя и простой, но громоздкой индукции. Мы ограничимся только примером. Производная $\frac{\partial^4 f}{\partial z\partial x\partial z\partial y}$ подчинена, очевидно, вектору (1, 1, 2). В предположении, что не только она, но и все частные производные от f, подчиненные этому вектору, непрерывны по (x, y, z), мы можем, пользуясь всякий раз либо определением частной производной либо теоремой 1, получить равенства

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z\partial x\partial z\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y\partial z^2}.$$

Например, во втором равенстве мы рассуждаем так: частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$, по условию, непрерывны относительно (x, y, z), тем более они непрерывны при фиксированном x относительно (y, z), поэтому они равны. В пятом равенстве это же рассуждение проводится для $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Упражнение. Показать, что функция

$$v = \frac{1}{8\pi^{3/2}(t_0 - t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}},$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

называемая фундаментальным решением уравнения теплопроводности, удовлетворяет дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\Delta_0 v - \frac{\Delta v}{\partial t_0} = 0, \quad \Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right).$$

§ 7.8. Дифференциал функции. Дифференциал высшего порядка

Рассмотрим функцию

$$W = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

заданную на некотором открытом множестве $G \subset R_n$. Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$W = \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, \ldots, u_m), \tag{2}$$

где

$$u_j = \psi_j(\mathbf{x}) \quad (j = 1, \ldots, m;\ \mathbf{x} \in G). \tag{3}$$

Ниже мы будем употреблять следующую терминологию: переменная W есть функция от независимой векторной переменной $\mathbf{x}$; эта же переменная W есть функция от *зависимой векторной переменной* $\mathbf{u}$. Последняя зависит от независимой переменной $\mathbf{x}$: каждому вектору $\mathbf{x}$ из G соответствует вектор

$$\mathbf{u} = (\psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x})).$$

Таким образом, роль векторной переменной $\mathbf{x}$ здесь носит исключительный характер — она в приводимых ниже рассуждениях будет фигурировать *только как независимая переменная.*

Пусть функция f имеет непрерывные частные производные первого порядка в точке $\mathbf{x} \in G$. Тогда, как мы знаем из § 7.5, она дифференцируема, т. е. приращение ее в этой точке может быть записано в виде

$$\Delta W = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} \Delta x_j + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{4}$$

$$\rho = |\Delta x| = \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2 \right)^{1/2}.$$

Сумма

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j \tag{5}$$

называется *главной линейной частью приращения* W в точке $\mathbf{x}$ или еще *дифференциалом* W *в этой точке, соответствующим приращениям* $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ *независимых переменных.*

Для независимых $x_1, \ldots, x_n$ полагают

$$\Delta x_j = dx_j \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

и называют эти величины не только приращениями независимых переменных x_i, но и их *дифференциалами.* Мы будем их называть *независимыми дифференциалами* в знак того, что они не зависят от $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Формально «независимость» величин dx_j будет проявляться в том, что при дифференцировании (по $x_1, \ldots, x_n$) они будут рассматриваться как *постоянные* ($d(dx_j) = 0$).

В силу соглашения (6) дифференциал W может быть записан в форме

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j. \tag{7}$$

Ясно, что dW есть величина, зависящая, вообще говоря, от $x_1, \ldots, x_n$ и $dx_1, \ldots, dx_n$.

Для любых двух функций, u и v, имеющих непрерывные частные производные в точке $\mathbf{x}$, справедливы свойства

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{8}$$

$$d(uv) = udv + vdu, \tag{9}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0), \tag{10}$$

и при этом частные производные от функций, стоящих в скобках, непрерывны в точке $\mathbf{x}$.

Докажем, например, третье из этих равенств:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right) dx_j = \sum_{1}^{n} \frac{v\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial v}{\partial x_j}}{v^2} dx_j =$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(v\sum_{1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j - u\sum_{1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx_j\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Непрерывность $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right)$ видна из третьего члена цепи.

Дифференциал от функции W называют еще *дифференциалом первого порядка*, потому что приходится еще рассматривать дифференциалы высших порядков.

Пусть теперь функция W имеет вторые непрерывные частные производные. По определению, *второй дифференциал* от нее, соответствующий независимым приращениям (дифференциалам) $dx_1, \ldots, dx_n$, определяется равенством

$$d^2W = d(dW), \tag{11}$$

где считается, что обе операции d в правой части (11) берутся для указанных независимых приращений $dx_1, \ldots, dx_n$, которые должны рассматриваться как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$). Таким образом,

$$d^2W = d\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(d\frac{\partial W}{\partial x_i}\right) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i. \tag{12}$$

Так как $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}$, то второй дифференциал представляет собой квадратическую форму относительно независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$.

Вообще, дифференциал порядка l от W для независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$ определяется по индукции при помощи рекуррентного соотношения

$$d^l W = d(d^{l-1}W) \quad (l = 2, 3, \ldots), \tag{13}$$

где d^l, d, d^{l-1} берутся для указанных независимых дифференциалов dx_i, которые к тому же рассматриваются при вычислениях как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$).

Рассуждая как в (12), легко получим, что

$$d^3W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 W}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} dx_k dx_i dx_j$$

и в общем случае

$$d^l W = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_l=1}^{n} \frac{\partial^l W}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_l}} dx_{k_1} \ldots dx_{k_l}.$$

Мы определили понятие дифференциала функции W в терминах независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ (или независимой векторной переменной $\mathbf{x}$). Но пусть, как это было объяснено в начале этого параграфа, W рассматривается теперь как функция от *зависимой* векторной переменной $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$. Возникает вопрос, как выражаются дифференциалы первого и высшего порядков в терминах этой переменной u. Начнем изучение этого вопроса в случае дифференциала первого порядка.

Будем предполагать, что функции $\varphi(u)$ и $\psi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$, о которых шла речь в начале параграфа, имеют непрерывные частные производные. Тогда

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} du_i, \tag{14}$$

и мы получили, как в случае одной переменной, что первый дифференциал от W выражается через зависимые переменные так же, как через независимые. В этом проявляется *инвариантность формы первого дифференциала.*

Чтобы исследовать поставленный вопрос, в случае второго дифференциала будем предполагать, что функции φ и ψ_j имеют непрерывные частные производные второго порядка.

Дифференцируя обе части (14), приняв во внимание свойства (8) и (9), получим (пояснения ниже)

$$d^2W = d(dW) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial W}{\partial u_i} du_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_i} du_j du_i + \frac{\partial W}{\partial u_i} d^2 u_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} du_i du_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} d^2 u_i. \quad (15)$$

Во втором равенстве этой цепи мы воспользовались свойствами (8) и (9), и, кроме того, тем фактом, что форма первого дифференциала сохраняется и для зависимых переменных u_j.

Мы видим, что второй дифференциал от функции W, выраженный в терминах зависимых переменных u_j, существенно распадается на два слагаемых. Первое слагаемое представляет собой квадратическую форму, аналогичную форме (12), где d^2W выражалось через независимые переменные. Второе же слагаемое представляет собой некоторый добавок, с которым надо считаться: если $u_i \neq x_i$, то этот добавок, вообще говоря, не равен нулю. Впрочем, если u_i $(i = 1, \ldots, m)$ — линейные функции от $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, то свойство инвариантности сохраняется и для дифференциалов высшего порядка.

Отметим, что из наших рассуждений следует, что если выражение (15) взято для $dx_1, \ldots, dx_n$, которые фигурируют в выражении (12), то оба эти выражения тождественно равны, каковы бы ни были $\mathbf{x}$, для которых существуют указанные выше непрерывные частные производные второго порядка, и каковы бы ни были независимые dx_i.

Выраженные через зависимые переменные u_j дифференциалы d^3W, $d^4W, \ldots$ вычисляются подобным образом последовательно. Приходится считаться с тем фактом, что выражения для них становятся все более громоздкими.

§ 7.9. Предельная точка. Теорема Вейерштрасса. Замкнутые и открытые множества

Рассмотрим произвольное множество E точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства $R_n = R$.

По определению, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ есть *предельная точка* E, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x}$, принадлежащую E и отличную от $\mathbf{x}^0$.

На самом деле из этого определения следует, что любая окрестность $\mathbf{x}^0$ содержит в себе бесконечное множество точек $\mathbf{x}$, принадлежащих E, и можно определить последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, $k = 1, 2, \ldots$ таких, что $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0$ и $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| \to 0$.