Дифференцируя обе части (14), приняв во внимание свойства (8) и (9), получим (пояснения ниже)

$$d^2W = d(dW) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial W}{\partial u_i}\,du_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_i}\,du_j du_i + \frac{\partial W}{\partial u_i}\,d^2u_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j}\,du_i du_j + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}\,d^2u_i. \quad (15)$$

Во втором равенстве этой цепи мы воспользовались свойствами (8) и (9), и, кроме того, тем фактом, что форма первого дифференциала сохраняется и для зависимых переменных u_j.

Мы видим, что второй дифференциал от функции W, выраженный в терминах зависимых переменных u_j, существенно распадается на два слагаемых. Первое слагаемое представляет собой квадратическую форму, аналогичную форме (12), где d^2W выражалось через независимые переменные. Второе же слагаемое представляет собой некоторый добавок, с которым надо считаться: если $u_i \neq x_i$, то этот добавок, вообще говоря, не равен нулю. Впрочем, если u_i $(i = 1, \ldots, m)$ — линейные функции от $x_1, \ldots, x_n$, то свойство инвариантности сохраняется и для дифференциалов высшего порядка.

Отметим, что из наших рассуждений следует, что если выражение (15) взято для $dx_1, \ldots, dx_n$, которые фигурируют в выражении (12), то оба эти выражения тождественно равны, каковы бы ни были $\mathbf{x}$, для которых существуют указанные выше непрерывные частные производные второго порядка, и каковы бы ни были независимые dx_i.

Выраженные через зависимые переменные u_j дифференциалы d^3W, d^4W, ... вычисляются подобным образом последовательно. Приходится считаться с тем фактом, что выражения для них становятся все более громоздкими.

§ 7.9. Предельная точка. Теорема Вейерштрасса. Замкнутые и открытые множества

Рассмотрим произвольное множество E точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства $R_n = R$.

По определению, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ есть *предельная точка* E, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x}$, принадлежащую E и отличную от $\mathbf{x}^0$.

На самом деле из этого определения следует, что любая окрестность $\mathbf{x}^0$ содержит в себе бесконечное множество точек $\mathbf{x}$, принадлежащих E, и можно определить последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, $k = 1, 2, \ldots$ таких, что $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0$ и $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| \to 0$.

В самом деле, согласно определению предельной точки, для каждого натурального $k = 1, 2, \ldots$ имеется $\mathbf{x}^k \in E$, для которой $0 < |\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < 1/k$ и $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < |\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^0|$, где $k = 1, 2, \ldots$.

Приведем другие определения предельной точки, очевидно, эквивалентные данному выше:

$\mathbf{x}^0$ есть предельная точка E, если любой открытый шар (открытый куб) с центром в $\mathbf{x}^0$ содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ или если существует последовательность точек $\{\mathbf{x}^k\}$ такая, что $\mathbf{x}^k \in E$ $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ $(k \to \infty)$.

Множество всех предельных точек E обозначается через E' и называется *производным множеством* от E.

Пример 1. Пусть E — множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными координатами. Любая точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in R$ есть предельная точка E, потому что произвольный куб $|x_j - x_j^0| < \delta$ $(j = 1, \ldots, n)$ содержит в себе точки E, отличные от x^0. Таким образом, $E' = R_n$.

Пример 2. Конечное множество точек $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^N$ не имеет ни одной предельной точки $(E \neq \varnothing)$ хотя бы потому, что в любой окрестности предельной точки должно было бы быть бесконечное множество точек E.

Пример 3. Множество E $\mathbf{x}^k = (k, 0, \ldots, 0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ не имеет предельных точек $(E' = \varnothing)$, потому что расстояние между любыми его точками $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l| = |k - l| \geqslant 1$ $(k \neq l)$. Если бы точка $\mathbf{x} \in R_n$ была предельной точкой E, то в любой ее малой окрестности находились бы две точки E,— расстояние между ними могло быть меньшим как угодно малого $\delta > 0$.

Пример 4. Пусть

$$V_1 = \left\{\mathbf{x}: \sum_1^n x_k^2 < r^2\right\}, \quad \Gamma = \left\{\mathbf{x}: \sum_1^n x_k^2 = r^2\right\}, \quad V_2 = \left\{\mathbf{x}: \sum_1^n x_k^2 > r^2\right\}.$$

Распространяя обычную терминологию с $n = 3$ на произвольное n, мы скажем, что V_1 есть открытый шар в R_n с центром в нулевой точке, Γ — его граница, и V_2 — его внешность. Имеют место следующие факты:

$$\begin{gathered} V_1' = V_1 + \Gamma, \ (V_1 + \Gamma)' = V_1 + \Gamma, \ V_2' = V_2 + \Gamma, \\ (V_2 + \Gamma)' = V_2 + \Gamma, \ \Gamma' = \Gamma. \end{gathered} \tag{1}$$

Из наглядных соображений (рис. 7.4), которые легко перевести на язык неравенств, следует, что точку $\mathbf{x}^1 \in V_1$ можно окружить достаточно малым шаром (с центром в ней) полностью принадлежащим V_1, откуда x^1 есть предельная точка V_1, но не есть предельная точка Γ и V_2. Любой шар с центром в произвольной точке $\mathbf{x}^2 \in \Gamma$ содержит в себе отличные от нее точки V_1, Γ и V_2, и потому $\mathbf{x}^2$ есть предельная точка V_1, Γ, V_2, $V_1 + \Gamma$, $V_2 + \Gamma$. Наконец, точку $\mathbf{x}^3 \in V_2$ можно окружить шаром, полностью принадлежащим V_2, и потому она есть предельная точка V_2, но не есть предельная точка V_1, Γ, $V_1 + \Gamma$. Отсюда следуют равенства (1).

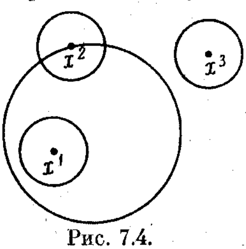

Рис. 7.4.

Множество E называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре (кубе). В противном случае E называется *неограниченным*. В этом определении можно считать, что шар (куб), о котором идет речь, имеет центр в нулевой точке, потому что, если все точки $\mathbf{x} \in E$ удовлетворяют неравенству $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| < \rho_1$, то и неравенству $|\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| + |\mathbf{x}^0| < \rho_2$, где $\rho_2 = \rho_1 + |\mathbf{x}^0|$.

Следующая теорема обобщает соответствующую одномерную теорему и базируется на ней:

Теорема 1. *Из всякой ограниченной последовательности точек* $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *можно выделить подпоследовательность* $\left\{\mathbf{x}^{k_l}\right\}$ $(l = 1, 2, \ldots)$, *сходящуюся к некоторой точке* $\mathbf{x}^0$:

$$\left\|\mathbf{x}^{k_l} - \mathbf{x}^0\right\| \to 0 \quad (l \to \infty).$$

Доказательство. Так как последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ ограничена, то существует число M такое, что

$$M > |\mathbf{x}^k| \geqslant |x_j^k| \quad (j = 1, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots).$$

Это показывает, что координаты точек $\mathbf{x}^k$ также ограничены. Первая координата пробегает ограниченную последовательность $\{x_1^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и на основании одномерной теоремы найдется подпоследовательность $\{k_{l_1}\}$ натуральных чисел и некоторое число x_1^0 такие, что $x_1^{k_{l_1}} \to x_1^0$ $(l_1 \to \infty)$. Вторую координату x_2^k рассмотрим только для найденных натуральных k_{l_1}. Подпоследовательность $\left\{x_2^{k_{l_1}}\right\}$ ограничена, и по одномерной теореме можно выбрать подпоследовательность $\left\{x_2^{k_{l_2}}\right\}$ и число x_2^0 такие, что $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$. Так как $\{k_{l_2}\}$ есть подпоследовательность $\{k_{l_1}\}$, то имеет место одновременно $x_1^{k_{l_2}} \to x_1^0$, $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$. В силу ограниченности третьей координаты можно, рассуждая как выше, получить подпоследовательность $\left\{k^{l_3}\right\}$ подпоследовательности $\left\{k^{l_2}\right\}$, для которой одновременно

$$x_1^{k_{l_3}} \to x_1^0, \quad x_2^{k_{l_3}} \to x_2^0, \quad x_3^{k_{l_3}} \to x_3^0,$$

где x_3^0 — некоторое число. Продолжая этот процесс, на n-м его этапе получим подпоследовательность натуральных чисел $k_{l_n} = k_l$ и систему чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ такие, что одновременно $x_j^{k_l} \to x_j^0$ $(l \to \infty;\ j \subset 1, \ldots, n)$. Полагая $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, получим утверждение теоремы.

Но возвратимся к предельным точкам. Конечное (состоящее из конечного числа точек) множество не имеет предельных точек (пример 2). Существуют бесконечные неограниченные множества, не имеющие предельных точек (пример 3). Однако имеет место

Теорема 2 (Вейерштрасса). *Ограниченное бесконечное множество E имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Так как множество E бесконечно, то оно содержит в себе последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ (бесконечную!) различных между собой точек. Из нее можно на основании предыдущей теоремы выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k_l}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in R_n$. Так как все $\mathbf{x}^{k_l}$ для разных l различны, то $\mathbf{x}^0$ есть, очевидно, предельная точка E — ведь в любой ее окрестности имеются точки $\mathbf{x}^{k_l} \in E$, отличные от $\mathbf{x}^0$.

Конечно, $\mathbf{x}^0$ может принадлежать или не принадлежать к E.

Множество $E \subset R_n$ называется *замкнутым*, если все его предельные точки принадлежат ему ($E' \subset E$).

Надо иметь в виду, что в этом определении не утверждается, что E обязано иметь предельные точки, а только говорится, что если E имеет такие точки, то они принадлежат к E. Таким образом, *всякое множество, не имеющее вовсе предельных точек, замкнуто. Пустое множество, конечное множество, множество целых точек* (имеющих целые координаты) в пространстве R_n — *все это замкнутые множества.*

Множество примера 1 не замкнуто потому, что иррациональные точки являются предельными его точками, но они не принадлежат ему.

Шар вместе с границей (пример 4), внешность шара вместе с границей, сама граница — все это примеры замкнутых множеств. Открытый шар, внешность (замкнутого) шара — не замкнутые множества. Это геометрически очевидно, но легко может быть обосновано при помощи соответствующих неравенств.

Дадим еще другое определение замкнутого множества: множество E замкнуто, если из того, что точки сходящейся к $\mathbf{x}^0$ последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ принадлежат E, следует принадлежность $\mathbf{x}^0$ множеству E.

Эти определения эквивалентны. В самом деле, пусть E замкнуто в смысле первого определения, а второе определение для E не выполняется. Тогда найдутся последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ и точка $\mathbf{x}^0$ такие, что $\mathbf{x}^k \in E$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$, но $\mathbf{x}^0 \notin E$. Но это возможно, очевидно, только тогда, когда элементы $\mathbf{x}^k$ последовательности пробегают бесконечное множество (различных между собой) точек, но тогда $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка E и она должна по условию принадлежать E. Мы пришли к противоречию. Итак, из первого определения следует второе.

Наоборот, пусть E — замкнутое множество по второму определению и $\mathbf{x}^0$ предельная точка E; тогда найдется, как мы знаем, последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$. По второму определению $\mathbf{x}^0 \in E$ и, таким образом, всякая предельная точка E принадлежит E, т. е. выполняется первое определение.

Если к множеству E добавить все его предельные точки, то мы получим множество, которое обозначают через $\bar{E}$ и называют замыканием E. Таким образом, $\bar{E} = E + E'$.

Теорема 3. *Замыкание множества E есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка $\bar{E}$. Зададим $\varepsilon > 0$. В шаре $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| < \varepsilon$ должна существовать точка $\mathbf{x}' \in \bar{E}$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^0$. Последнюю можно окружить шаром, принадлежащим исходному шару, настолько малым, что он не содержит в себе точки $\mathbf{x}^0$. В нем обязательно должна быть точка E, которая, таким образом, принадлежит исходному шару. Итак, в любом шаре с центром $\mathbf{x}^0$ имеется отличная от $\mathbf{x}^0$ точка E. Это показывает, что $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка E, т. е. $\mathbf{x}^0 \in \bar{E}$.

Между замкнутыми и открытыми (см. § 7.1) множествами имеется тесная связь: *если E замкнуто, то $R-E$ открыто, и наоборот.* В самом деле, пусть E замкнуто и $\mathbf{x}^0 \in R-E$; тогда существует шар с центром в $\mathbf{x}^0$, принадлежащий к $R-E$. Если бы это было не так, то существовала бы последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, сходящаяся к $\mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$), и в силу замкнутости E тогда бы $\mathbf{x}^0 \in E$, и мы пришли к противоречию.

Пусть теперь E — открытое множество. Возьмем произвольную, принадлежащую $R-E$, последовательность точек $\mathbf{x}^k$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0$. Последняя не может быть точкой E, потому что в любой ее окрестности имеются точки $R-E$, но тогда она принадлежит $R-E$. Следовательно, $R-E$ замкнуто.

Введем три определения.

1. Точка $\mathbf{x}^0$ называется *граничной точкой* множества E, если любая ее окрестность содержит в себе как точки E так и точки, не принадлежащие E.

2. Точка $\mathbf{x}^0$ называется (см. § 7.1) *внутренней точкой* множества E, если существует ее окрестность, полностью принадлежащая E.

3. Точка $\mathbf{x}^0$ называется *внешней* по отношению ко множеству E, если она не только не принадлежит E, но существует окрестность $\mathbf{x}^0$, полностью не принадлежащая E.

Всюду в этих определениях, очевидно, «окрестность» можно заменить на «открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$» или «открытый куб с центром в $\mathbf{x}^0$».

Обратим внимание на тот факт, что определения 1—3 взаимно исключают друг друга и единственно возможны. Иначе говоря, каждая точка $\mathbf{x} \in R$ удовлетворяет одному и только одному из этих определений.

Таким образом, если задано произвольное множество $E \subset R$, то по отношению к нему все пространство R распадается на три попарно непересекающихся множества:

1) E_1 — множество внутренних точек E — *открытое ядро множества E*. Это открытое множество, потому что, если $\mathbf{x} \in E_1$, то найдется полностью принадлежащий к E открытый шар V с центром в $\mathbf{x}^0$. Но все точки V — внутренние для V, следовательно, и для E, следовательно, $V \subset E_1$.

2) E_2 — множество внешних точек E — **внешность** E. Это тоже открытое множество, что доказывается аналогично.

3) Γ — множество граничных точек E — **граница** E.

Это замкнутое множество, потому что E_1+E_2 — открыто как сумма двух открытых множеств и $\Gamma = R-(E_1+E_2)$.

Множества $E_1+\Gamma$ и $E_2+\Gamma$, очевидно, замкнутые, потому что их дополнения до R открытые.

Имеют место (теоретико-множественные) равенства

$$E_1+\Gamma = E+\Gamma = \overline{E},\quad E_2+\Gamma = (R-E)+\Gamma = \overline{R-E},$$

доказательство которых представляется читателю.

В равенстве $R = E_1+E_2+\Gamma$ одно или два слагаемых в правой части могут оказаться пустыми множествами. Надо иметь в виду, что пустое множество и все пространство R являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.

Пример 5. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна на R и c — заданное число, тогда, как нетрудно доказать, множества (точек $\mathbf{x}$, для которых выполняются указанные в скобках соотношения) $\{f(\mathbf{x}) = c\}$, $\{f(\mathbf{x}) \leqslant c\}$, $\{f(\mathbf{x}) \geqslant c\}$ замкнутые, а множества $\{f(\mathbf{x}) > c\}$, $\{f(\mathbf{x}) < c\}$ — открытые. Конечно, некоторые из этих множеств могут оказаться пустыми, но пустые множества одновременно замкнуты и открыты.

Результаты примера 4 немедленно следуют из этих утверждений. Надо иметь в виду, что если бы функция $f(\mathbf{x})$ была задана только на части R, то указанные утверждения могут и не иметь места.

Теорема 4. *Всякое открытое одномерное (лежащее на оси $(-\infty, \infty)$) множество G есть сумма конечного или счетного числа попарно не пересекающихся интервалов*:

$$G = \sum \delta_k.$$

В самом деле, пусть точка $\mathbf{x}^0 \in G$; тогда существуют интервалы $\delta_{\mathbf{x}^0} = (\lambda, \mu)$, покрывающие $\mathbf{x}^0$ и полностью принадлежащие G. Пусть

$$\alpha = \inf \lambda,\quad \beta = \sup \mu,$$

где нижняя и верхняя грани распространены на всевозможные указанные интервалы $\delta_{\mathbf{x}^0}$. В частности, может случиться, что $\alpha = -\infty$ или $\beta = +\infty$ или эти равенства выполняются одновременно (и тогда $G = (-\infty, \infty)$). Каждой точке $\mathbf{x}^0 \in G$ мы привели в соответствие максимальный интервал $\delta = (\alpha, \beta)$, ее содержащий и полностью содержащийся в G. Пусть A есть множество различных интервалов δ (очевидно, попарно не пересекающихся). Каждому из них приведем в соответствие одно принадлежащее ему рациональное число. Ясно, что A конечно или счетно, потому что оно эквивалентно некоторому подмножеству рациональных чисел. Это доказывает теорему.

Упражнения.

1. Доказать, что сумма конечного или счетного числа открытых множеств, а также пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество. Привести пример счетной системы открытых множеств, пересечение которых не есть открытое множество.

2. Доказать, что сумма конечного числа замкнутых множеств, так же как пересечение конечного и счетного числа замкнутых множеств, есть множество замкнутое. Привести пример счетной системы замкнутых множеств, сумма которых не есть замкнутое множество.