Глава 8

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ

§ 8.1. Введение. Методы замены переменной и интегрирования по частям

В § 1.6 были введены понятия первообразной функции и неопределенного интеграла. Мы рекомендуем читателю возобновить в памяти все, что говорилось там, перед тем как изучать эту главу. Цель этой главы дать практические навыки вычисления неопределенных интегралов от некоторых элементарных функций.

В теории определенных интегралов будет доказана теорема, утверждающая, что непрерывная на интервале (a, b) (или на отрезке $[a, b]$) функция $f(x)$ имеет на нем первообразную $F(x)$, которая, конечно, в свою очередь непрерывна. Так как неопределенным интегралом от f на (a, b) называется произвольная первообразная для f функция и любые две первообразные для f отличаются лишь на некоторую постоянную, то неопределенный интеграл от f на (a, b) равен $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-либо первообразная для f функция, а C — соответствующим образом подобранная постоянная. Таким образом, на основании указанной выше теоремы можно сказать, что всякая непрерывная на интервале функция f имеет на нем неопределенный интеграл. Однако если f есть элементарная функция (см. § 1.3), то оказывается, что далеко не всегда ее первообразная F, а следовательно, и неопределенный интеграл от нее, есть в свою очередь элементарная функция. Это может быть, а может и не быть, и в этом различие между дифференциальным и интегральным исчислением. В то время как производная от элементарной функции есть элементарная функция, обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Имеются такие элементарные функции, которые, как говорят, не интегрируются в элементарных функциях; их неопределенные интегралы хотя и существуют, но не являются элементарными функциями.

Но все же к нашему счастью имеются классы интересных в математической практике элементарных функций, которые интегрируются в элементарных же функциях, т. е. их первообразные суть элементарные функции.

Эта глава посвящена изучению методов интегрирования функций подобных классов.

Начнем с того, что приведем таблицу неопределенных интегралов, вытекающую из основной таблицы производных от простейших элементарных функций:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n+1 \neq 0);$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, \quad a \neq 1);$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C' \qquad \left(C' = \frac{\pi}{2} + C\right);$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$$

Слева в каждом равенстве стоит произвольная (но определенная) первообразная функция для соответствующей подынтегральной функции, справа же — одна определенная первообразная, к которой еще прибавляется константа C такая, чтобы выполнялось равенство между этими функциями.

Первообразные функции в этих формулах определены и непрерывны на тех интервалах, на которых определены и непрерывны соответствующие подынтегральные функции. Эта закономерность не случайна: как отмечено выше, всякая непрерывная на интервале функция имеет на нем непрерывную первообразную.

В § 1.6 была выведена формула

$$\int (A_1 u(x) + A_2 v(x))\, dx = A_1 \int u(x)\, dx + A_2 \int v(x)\, dx + C, \qquad (1)$$

выражающая линейное свойство неопределенного интеграла.

Основную роль в интегральном исчислении играет также формула замены переменной (или подстановки):

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt + C = \int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) + C. \qquad (2)$$

В этой формуле предполагается, что $x=\varphi(t)$ есть непрерывно дифференцируемая (имеющая непрерывную производную) функция на некотором интервале изменения t, а $f(x)$ — непрерывная функция на соответствующем интервале или отрезке оси x. Первое равенство (2) утверждает, что левая его часть тождественно равна правой, если в ней (после интегрирования!) сделать подстановку $x=\varphi(t)$ и подобрать соответствующую константу C. Докажем это утверждение. Слева в (2) стоит функция, которая является первообразной от $f(x)$. Ее производная по t равна

$$\frac{d}{dt}\int f(x)\,dx=\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)\varphi'(t)=f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Следовательно, если ввести в этой функции подстановку $x=\varphi(t)$, то получится первообразная от функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Интеграл же справа есть, по определению, некоторая первообразная от $f(\varphi(t))\varphi(t)$. Но две первообразные для одной и той же функции отличаются на некоторую постоянную C. Это и записано в виде первого равенства (2). Что касается второго, то оно носит формальный характер — мы просто уславливаемся писать

$$\int F(t)\,\varphi'(t)\,dt=\int F(t)\,d\varphi(t). \tag{3}$$

Например,

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx+C=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)+C=$$
$$=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du+C_1=\frac{1}{2}e^{u}+C_2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C_2\quad(u=x^2). \tag{4}$$

Первое равенство написано в силу (1), второе в силу (3), третье — в силу (2) (постоянная изменилась) и четвертое — в силу формулы из таблицы (постоянная изменилась). Однако в практике вычислений в членах, содержащих неопределенный интеграл, константы C не пишут и тогда цепочка (4) упрощается:

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C,$$

к тому же мы опустили очевидные 3-е и 4-е равенства.

Вот еще примеры:

$$\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}+C,$$

$$\int \sin kx\,dx=\frac{1}{k}\int \sin kx\,d(kx)=-\frac{1}{k}\cos kx+C\qquad(k\neq 0).$$

Приведем еще примеры, которые все равно нам понадобятся в теории интегрирования рациональных дробей:

$$(m \neq 1) \int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{1}{(x-a)^{m-1}(1-m)} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a^2)} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

$$(a \neq 0) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$\left(q - \frac{p^2}{4} = 0\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+(p/2))^2} =$$

$$= \int \frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2} = -\frac{1}{x+(p/2)} + C; \quad (5)$$

$$\left(q - \frac{p^2}{4} = a^2 > 0,\ a > 0\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+(p/2))^2 + (q-(p^2/4))} =$$

$$= \int \frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\dfrac{x+(p/2)}{a}\right)}{1+\left(\dfrac{x+(p/2)}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+(p/2)}{a} + C;$$

$$(6)$$

$$\left(q - \frac{p^2}{4} = -a^2,\ a > 0\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2-a^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+(p/2)-a}{x+\dfrac{p}{2}+a}\right| + C; \quad (7)$$

$$\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + C;$$

$$(A \neq 0) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+(2B/A)}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} + \frac{A}{2}\int \frac{(2B/A)-p}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + D\int \frac{dx}{x^2+px+q}, \quad D = \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A} - p\right) \quad (8)$$

(далее см. (7)).

Для теории интегрирования рациональных дробей важно, что вычисление интегралов типа (5)—(8), где a, A, B, p, q — константы, приводит к элементарным функциям (рациональным, ln и arctg).

Перейдем к формуле интегрирования по частям:

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx + C \tag{9}$$

или, что все равно, $\int udv = uv - \int vdu + C$.

В этой формуле u и v — непрерывно дифференцируемые функции. Производная от ее левой части равна uv', а производная от правой части также равна $uv' = (uv)' - vu'$, поэтому они отличаются лишь на некоторую постоянную, что и записано в (9).

Например,

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C;$$

$$\int xe^x dx = \int x\, de^x = e^x x - \int e^x dx = e^x (x-1) + C;$$

$$\int x \sin x\, dx = \int xd(-\cos x) = \\ = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C;$$

$$\int e^{ax}\cos x\, dx = e^{ax}\sin x - a\int e^{ax}\sin x\, dx = \\ = e^{ax}\sin x - a\left[e^{ax}(-\cos x) + a\int e^{ax}\cos x\, dx\right],$$

откуда

$$\int e^{ax}\cos x\, dx = \frac{e^{ax}(\sin x + a\cos x)}{1+a^2} + C.$$

Приведем еще пример, который будет нужен для теории интегрирования рациональных дробей.

Пусть $k > 1$ — натуральное и $a > 0$; тогда

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}} = a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k} + \frac{1}{2}\int \frac{x2xdx}{(x^2+a^2)^k} = \\ = a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k} + \frac{1}{2}\left\{\frac{x}{(1-k)(x^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1-k}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}}\right\},$$

откуда

$$a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k} = \frac{x}{2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{3-2k}{2(1-k)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}}.$$

Теперь (если $k > 2$) к интегралу в правой части можно применить тот же процесс, приводящий к понижению на единицу показателя степени в знаменателе подынтегральной дроби. В конце концов придем к интегралу от $(x^2+a^2)^{-1}$ (приводящему к arctg).

Таким образом, при $q-(p^2/4)=a^2>0$ и натуральном k интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} + C \quad \left(u = x+\frac{p}{2}\right) \tag{10}$$

берется в элементарных функциях.

Примеры.

Замена переменной (подстановка):

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} 1) + C = \operatorname{arctg}\frac{x \pm 1}{1 \pm x} + C \quad (a>0).$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0).$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{1}{2}\frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$

5. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \sec^2\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x+\sin^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{2+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x\right) + C.$

Интегрирование по частям

8. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

9. $\displaystyle\int \arcsin x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx =$

$$= x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x - \ln|\cos x| + C.$

Комбинированные способы:

11. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

12. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int (1+x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)\arcsin x -$

$$- \int \arcsin x\,dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$