3) трехчлен имеет комплексные корни (верхний знак здесь и далее соответствует положительным x или z); трехчлен может иметь и действительные корни, лишь бы они были различны.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+1}} = \mp \int \frac{dz}{\sqrt{a+bz+z^2}} =$$

$$= \mp \ln\left|\frac{b}{2}+z+\sqrt{a+bz+z^2}\right| + C = \mp \ln\left|\frac{b}{2}+\frac{1\pm\sqrt{ax^2+bx+1}}{x}\right| + C;$$

4) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx-1}} = \mp \int \frac{dz}{\sqrt{a+bz-z^2}} =$$

$$= \mp \arcsin\frac{2z-b}{\sqrt{b^2+4a}} + C = \pm \arcsin\frac{bx-2}{x\sqrt{b^2-4a}} + C \ (b^2+4a>0);$$

в частности, $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mp \arcsin\frac{1}{x} + C;$

5) интегралы $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-m)\sqrt{a+bx+cx^2}}$

приводятся к предыдущим, если ввести новые переменные, соответственно, $z=\sqrt{|c|}\,x$, $z=\sqrt{|c|}\,(x-m)$.

§ 8.10. Биномиальные дифференциалы. Теорема Чебышева *)

Рассмотрим интеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx, \tag{1}$$

где a, b — произвольные, отличные от нуля числа, а m, n, p — рациональные числа. Подынтегральное выражение в (1) называется *биномиальным дифференциалом.*

Подстановка $x^n=t$, $x=t^{1/n}$, $dx=\frac{1}{n}t^{(1/n)-1}dt$ приводит (1) к виду

$$\frac{1}{n}\int t^{(m+1/n)-1}(a+bt)^p dt. \tag{2}$$

Если положить $((m+1)/n)-1=q$, то вопрос сводится к интегралу вида

$$\int t^q (a+bt)^p\,dt, \tag{3}$$

где p и q — рациональные.

Интеграл (3) всегда берется в элементарных функциях, если одно из чисел p, q, $p+q$ — целое (положительное, нуль или отрицательное).

*) П. Л. Чебышев (1821—1894) — великий русский математик и механик, академик.

В самом деле, если p — целое, то наш интеграл имеет вид $\int R(t, t^q)dt$, где q — рациональное. Если же q — целое, то он имеет вид $\int R(t, (a+bt)^p)\,dt$, где p — рациональное. Наконец, если $p+q$ — целое, то его можно записать в виде $\int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$.

Все эти три выражения, как мы знаем (см. § 8.8) приводятся соответствующими подстановками к интегралам от рациональных функций.

П. Л. Чебышев доказал замечательную теорему, утверждающую, что *если рациональные p и q не удовлетворяют одному из перечисленных трех условий, то интеграл* (3) *не интегрируется в элементарных функциях.*

Упражнения.

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$; 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$; 3. $\int \frac{1+x^{1/3}}{1+x^{1/4}}\,dx$;

4. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$; 5. $\int (a+x)^{2/3}x^3\,dx$; 6. $\int \frac{dx}{(1+x)^{1/3}-(1+x)^{1/2}}$.

Показать, что

7. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C$;

8. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| + C$.

§ 8.11. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим интеграл

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx, \tag{1}$$

где

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)} \tag{2}$$

— рациональная функция от u, v (P и Q — многочлены от u, v).

1. Если один из многочленов P, Q четный по v, а другой — нечетный по v, то R можно представить, умножив, если это необходимо, числитель и знаменатель (1) на v, в виде $R(u, v) = \frac{M(u, v^2)\,v}{N(u, v^2)}$, где $M(\mu, \nu)$, $N(\mu, \nu)$ — многочлены от μ, ν. Поэтому подстановка $t = \cos x$ приводит интеграл (1) к виду

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = -\int \frac{M(t, 1-t^2)}{N(t, 1-t^2)}\,dt = \int R(t)\,dt,$$

где $R(t)$ — рациональная функция от t.