В самом деле, если p — целое, то наш интеграл имеет вид $\int R(t, t^q)dt$, где q — рациональное. Если же q — целое, то он имеет вид $\int R(t, (a+bt)^p)\,dt$, где p — рациональное. Наконец, если $p+q$ — целое, то его можно записать в виде $\int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$.

Все эти три выражения, как мы знаем (см. § 8.8) приводятся соответствующими подстановками к интегралам от рациональных функций.

П. Л. Чебышев доказал замечательную теорему, утверждающую, что *если рациональные p и q не удовлетворяют одному из перечисленных трех условий, то интеграл* (3) *не интегрируется в элементарных функциях.*

Упражнения.

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$; 3. $\int \frac{1+x^{1/3}}{1+x^{1/4}}dx$;

4. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$; 5. $\int (a+x)^{2/3}x^3\,dx$; 6. $\int \frac{dx}{(1+x)^{1/3}-(1+x)^{1/2}}$.

Показать, что

7. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+C$;

8. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C$.

§ 8.11. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим интеграл

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx, \tag{1}$$

где

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)} \tag{2}$$

— рациональная функция от u, v (P и Q — многочлены от u, v).

1. Если один из многочленов P, Q четный по v, а другой — нечетный по v, то R можно представить, умножив, если это необходимо, числитель и знаменатель (1) на v, в виде $R(u, v) = \frac{M(u, v^2)\,v}{N(u, v^2)}$, где $M(\mu, \nu)$, $N(\mu, \nu)$ — многочлены от μ, ν. Поэтому подстановка $t = \cos x$ приводит интеграл (1) к виду

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = -\int \frac{M(t, 1-t^2)}{N(t, 1-t^2)}dt = \int R(t)\,dt,$$

где $R(t)$ — рациональная функция от t.

2. Если один из многочленов P, Q — четный по u, а другой — нечетный по u, то подстановка $t = \sin x$ рационализирует наш интеграл. Это доказывается как выше.

3. Если P и Q: 1) оба не изменяются при замене u, v соответственно на $-u$, $-v$ или 2) оба меняют знак, то интеграл (1) рационализируется подстановкой

$$t = \operatorname{tg} x \tag{3}$$

(или $t = \operatorname{ctg} x$).

Рассмотрим только первый случай, потому что второй сводится к нему умножением и числителя, и знаменателя дроби (2) на u или v. Каждый член многочлена P имеет вид

$$Au^l v^m = A\left(\frac{u}{v}\right)^l v^{l+m} = Aw^l v^{l+m} \quad \left(w = \frac{u}{v}\right),$$

где A — постоянный коэффициент. Поэтому

$$P(u, v) = M(w, v^2) = \sum \alpha(w) v^{2s} \tag{4}$$

есть многочлен от w^2 и v^2 (см. конец § 5.9).

Справа в (4) сумма распространена на конечное число слагаемых, $\alpha(w)$ — некоторые многочлены только от w, а s — целые неотрицательные числа. Аналогично устанавливается, что

$$Q(u, v) = N(w, v^2) = \sum \beta(w) v^{2s}$$

есть многочлен от w и v^2.

Так как в силу подстановки (3) $\sin^2 x = t^2/(1+t^2)$, $dx = dt/(1+t^2)$, то интеграл (1) преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{M\left(t, \dfrac{t^2}{1+t^2}\right) dt}{N\left(t, \dfrac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int r(t)\, dt,$$

где $r(t)$ — рациональная функция.

4. Для любой рациональной функции $R(u, v)$ подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ рационализирует интеграл (1). В самом деле, тогда

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{2}(1+t^2)\, dx, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

5. Функция

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5}$$

где a_k, b_k — постоянные коэффициенты, называется *тригонометрическим полиномом порядка (или степени) n*. Интегрирование ее не представляет никакого труда:

$$\int T_n(x)\,dx = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(a_k \sin kx - b_k \cos kx) + C. \tag{6}$$

Часто встречаются выражения

$$\cos^m x \cos^l x, \quad \cos^m x \sin^l x, \quad \sin^m x \sin^l x, \tag{7}$$

где m, l — целые неотрицательные числа. Это есть тригонометрические полиномы порядка $m+l$, т. е. их можно преобразовать к виду (5), где a_k и b_k — постоянные числа. Этот факт можно доказать, применяя метод индукции.

В самом деле (пояснения ниже)

$$\cos^m x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^m = \frac{1}{2^m}\left(e^{imx} + C_m^1 e^{i(m-2)x} + \ldots + e^{-imx}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^m}\left(\cos mx + C_m^1 \cos(m-2)x + \ldots + \cos(-mx)\right). \tag{8}$$

Надо учесть, что $\cos^m x$ — действительная функция, и потому последний член в этой цепи равенств получается из предпоследнего выделением его действительной части. Мнимая часть автоматически равна нулю. После замены в (8) x на $(x + (\pi/2))$ получим, в зависимости от того, будет ли m четным или нечетным,

$$\sin^m x = \frac{(-1)^{m/2}}{2^m}\left(\cos mx - C_m^1 \cos(m-2)x + \right.$$
$$\left. + C_m^2 \cos(m-4)x + \ldots + (-1)^{m/2}\cos(-mx)\right), \tag{9}$$

$$\sin^m x = \frac{(-1)^{m+1/2}}{2^m}\left(\sin mx - C_m^1 \sin(m-2)x + \ldots\right). \tag{10}$$

Тот факт, что выражения (7) суть тригонометрические полиномы указанной четности, следует из (8) — (10) и равенств

$$\begin{aligned} \sin\lambda x\cos\mu x &= \frac{1}{2}\,[\sin(\lambda+\mu)x + \sin(\lambda-\mu)x], \\ \cos\lambda x\cos\mu x &= \frac{1}{2}\,[\cos(\lambda+\mu)x + \cos(\lambda-\mu)x]. \end{aligned} \tag{11}$$

Примеры

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C$

(подстановка (3)).

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2)} = \int \frac{d(\operatorname{tg}(x/2))}{\operatorname{tg}(x/2)} = \ln|\operatorname{tg}(x/2)| + C$

(подстановка 4 § 8.11).

3. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{dx}{a\left(\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)\right)+b\left(\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)\right)} =$$
$$= \int \frac{dx}{\left[a\left(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\right)+b\left(1-\operatorname{tg}^2(x/2)\right)\right]\cos^2(x/2)} =$$
$$= \int \frac{2dt}{a(1+t^2)+b(1-t^2)}$$

(подстановка 4 § 8.11).

4. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x} = \int \frac{dx}{a+r\cos(x-\varphi)}, \quad (a^2+b^2+c^2>0),$$

где (постоянные) r и φ подобраны так, чтобы $b=r\cos\varphi$, $c=r\sin\varphi$. Таким образом, этот интеграл свелся к предыдущему.

5. $$\int \sin^5 dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) = -\int (1-t^2)^2\,dt.$$

6. $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)^2 d(\operatorname{ctg} x) = -\int (1+t^2)^2\,dt.$$

7. $$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^5 \frac{2\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{16}\int \frac{(1+t^2)^4}{t^5}\,dt \quad \left(t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

8. $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt \quad (t=\cos x).$$

9. $$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx.$$

10. $$\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \left[1-\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right](1-\cos 2x)\,dx$$

(дальше воспользоваться формулами (11)).

11. $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \int \frac{dx}{(a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x} =$$
$$= \int \frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)+C \quad (t=\operatorname{tg} x,\ a>0,\ b>0).$$

12. $$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx = 2\int \frac{dx}{2+\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)} + \ln|2+\cos x| =$$
$$= 2\int \frac{dx}{2\left(\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)\right)+\left(\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)\right)} + \ln|2+\cos x| =$$
$$= 2\int \frac{dx}{3\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} + \ln|2+\cos x| = 4\int \frac{d\operatorname{tg}(x/2)}{3+\operatorname{tg}^2(x/2)} + \ln|2+\cos x|.$$