§ 8.12. Тригонометрические подстановки

Интегралы вида

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$, 2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx$,

3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$ $(a>0)$

превращаются в рациональные выражения от $\sin t$ и $\cos t$ при помощи следующих подстановок

1) $x = a\sin t$, откуда $dx = a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$;

2) $x = a\operatorname{tg} t$, откуда $dx = a\cos^{-2} t\,dt$, $\sqrt{a^2+x^2} = a\cos^{-1} t$;

3) $x = a\sec t$, откуда $dx = a\operatorname{tg} t\sec t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{tg} t$.

Пример.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\cos t\, a\cos t\,dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}+C\right) \quad (x = a\sin t).$$

§ 8.13. Несколько важных интегралов, не выражаемых в элементарных функциях

Доказано, что неопределенный интеграл от функции e^{-x^2}, играющей большую роль в теории вероятностей, не выражается в элементарных функциях. Это же имеет место для функции $(\sin x)/x$, часто встречающейся в математическом анализе.

Большое значение в приложениях играют так называемые эллиптические интегралы (соответственно первого, второго и третьего рода):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (0<k<1). \tag{1}$$

Первые два из них зависят от параметра k, а третий — от k и еще от другого параметра h.

Доказано, что все три эти интеграла не берутся в элементарных функциях.