§ 8.12. Тригонометрические подстановки

Интегралы вида

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, 2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$,

3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ $(a>0)$

превращаются в рациональные выражения от $\sin t$ и $\cos t$ при помощи следующих подстановок

1) $x=a\sin t$, откуда $dx=a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$;

2) $x=a\operatorname{tg} t$, откуда $dx=a\cos^{-2}t\,dt$, $\sqrt{a^2+x^2}=a\cos^{-1}t$;

3) $x=a\sec t$, откуда $dx=a\operatorname{tg} t\sec t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg} t$.

Пример.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos t\, a\cos t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C=$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}+C\right)\quad(x=a\sin t).$$

§ 8.13. Несколько важных интегралов, не выражаемых в элементарных функциях

Доказано, что неопределенный интеграл от функции e^{-x^2}, играющей большую роль в теории вероятностей, не выражается в элементарных функциях. Это же имеет место для функции $(\sin x)/x$, часто встречающейся в математическом анализе.

Большое значение в приложениях играют так называемые эллиптические интегралы (соответственно первого, второго и третьего рода):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int\frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad(0<k<1).\tag{1}$$

Первые два из них зависят от параметра k, а третий — от k и еще от другого параметра h.

Доказано, что все три эти интеграла не берутся в элементарных функциях.

Подстановка $x = \sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$ сводит первый из них к виду

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}}, \tag{2}$$

второй — к виду

$$\frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{3}$$

а третий — к виду

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}. \tag{4}$$

В выражении (3) возникает интеграл

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{5}$$

отличный от (2). Интегралы (2), (5), (4) называются эллиптическими интегралами соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода в форме Лежандра *).

Эллиптическим интегралам посвящена обширная литература. Имеются подробные таблицы значений соответствующих им некоторых важных определенных интегралов, в частности, таблицы интеграла (5), взятого на интервале $(0, \pi/2)$.

---

*) А. М. Лежандр (1752—1833) — французский математик.