§ 8.2. Комплексные числа

Формально комплексные числа можно определить как пары (α, β) действительных чисел, для которых определено равенство и арифметические действия по следующим правилам:

1) равенство $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$;

2) $(\alpha, \beta) \pm (\alpha_1, \beta_1) = (\alpha \pm \alpha_1, \beta \pm \beta_1)$;

$$(\alpha, \beta)(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1, \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta);$$

$$\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha_1, \beta_1)} = \left(\frac{(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\right), \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0.$$

Для пар вида $(\alpha, 0)$ и только для них вводится понятие «$<$»:

$$(\alpha, 0) < (\beta, 0), \text{ если } \alpha < \beta. \tag{1}$$

Имеет место очевидное взаимно однозначное соответствие $\alpha \sim \sim (\alpha, 0)$ между парами $(\alpha, 0)$ и действительными числами. Важно, что оно изоморфно по отношению к арифметическим действиям и знаку «$<$»:

$$\alpha \pm \beta \sim (\alpha \pm \beta, 0) = (\alpha, 0) \pm (\beta, 0);$$

$$\alpha\beta \sim (\alpha\beta, 0) = (\alpha, 0)(\beta, 0);$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \sim \left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right) = \frac{(\alpha, 0)}{(\beta, 0)} \quad (\beta \neq 0)$$

(см. также (1)).

Это показывает, что пары $(\alpha, 0)$ суть действительные числа (см. § 2.4). Они только изображены необычно — в виде пар. Поэтому будем писать $\alpha = (\alpha, 0)$.

Итак, множество наших пар содержит в себе в качестве своего подмножества множество действительных чисел. Пары же (α, β), где $\beta \neq 0$ — это уже (не действительные) комплексные числа.

Легко проверяется, что наши пары подчиняются аксиомам арифметических действий таким же, как аксиомы действительного числа (см. § 2.4, аксиомы II, III), если только выбросить из последних те из них, которые связаны со знаком $<$. Для пар же $(\alpha, 0)$ выполняются вообще все аксиомы действительного числа.

Мы уже обозначили пары $(\alpha, 0)$ через α. Обозначим еще пару $(0, 1)$ буквой i $(i = (0, 1))$.

Над действительными числами α и символом i можно производить арифметические операции — ведь это же есть пары, для которых эти операции были определены. В результате этих операций будут получаться снова пары, которые, однако, можно записывать как некоторые арифметические комбинации из действительных чисел α, β, ... и символа i. Это исчисление облегчается тем, что $i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Любую пару можно представить в виде арифметической комбинации из действительных чисел и i:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha + \beta(0, 1) = \alpha + \beta i. \tag{2}$$

Таким образом, между парами (α, β) и выражениями $\alpha + i\beta$ имеется взаимно однозначное соответствие, выражаемое равенством (2). Это соответствие есть изоморфизм по отношению к арифметическим операциям, потому что в силу правил исчисления над действительными числами и символом i

$$(\alpha + i\beta) \pm (\alpha_1 + i\beta_1) = (\alpha \pm \alpha_1) + i(\beta \pm \beta_1),$$

$$(\alpha + i\beta)(\alpha_1 + i\beta_1) = (\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) + i(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta),$$

$$\frac{\alpha + i\beta}{\alpha_1 + i\beta_1} = \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + i\frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \quad (\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0).$$

Мы можем теперь изгнать из обращения (α, β) и оперировать представляющими их выражениями (комплексными числами) $\alpha + i\beta$. Делается еще один шаг: комплексные числа $\alpha + i\beta$, где α, β — действительные, обозначаются буквами, например, пишут $a = \alpha + i\beta$; α называется *действительной частью* (компонентой) числа a, а β—*мнимой его частью* (но β—действительно!).

Обычно, когда говорят, что задано комплексное число $a = \alpha + \beta i$, не делая дополнительных оговорок, то автоматически считают α и β действительными числами.

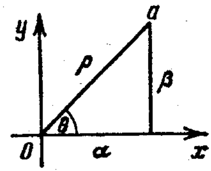

Рис. 8.1.

Комплексные числа изображаются в виде (рис. 8.1) точек (комплексной) плоскости, каждому числу $a = \alpha + i\beta$ приводится в соответствие точка (точка a) с прямоугольными координатами (α, β). Обозначим через ρ длину радиус-вектора точки a и через θ (при $a \neq 0$) — угол (в радианах), образованный им с положительным направлением оси x. Ясно, что $\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geqslant 0$, поэтому

$$a = \alpha + i\beta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{3}$$

Если $a = 0$, то $\rho = 0$ и равенство (3) сохраняется при любом θ.

Итак, мы доказали, что всякое комплексное число a можно представить в форме (3), где ρ — неотрицательное число. При этом ρ в этом (тригонометрическом) представлении есть единственное (неотрицательное) число; θ при $a \neq 0$ — также единственное число, если потребовать, чтобы оно удовлетворяло неравенствам

$$0 \leqslant \theta < 2\pi. \tag{4}$$

Если изменить в (3) одно из чисел ρ, θ или оба (при условии (4)), то получим уже другую комплексную точку.

Число ρ называется *модулем* a и обозначается так: $|a| = \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Если a действительное, то модуль и абсолютная величина a совпадают.

Число же θ, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant \theta < 2\pi$, называется *аргументом a в приведенной форме* и обозначается так: $\arg a$ *). Но уравнению (3) удовлетворяет также любое значение θ, отличающееся от $\arg a$ на величину $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). Поэтому еще вводится понятие *аргумента a*:

$$\theta = \operatorname{Arg} a = \arg a + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{5}$$

это бесконечнозначная функция от a. Любое решение уравнения (3) относительно θ может быть записано в форме (5).

Положим

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad (-\infty < \theta < \infty).$$

Мы, таким образом, впервые определяем функцию e^z для чисто мнимого аргумента $z = i\theta$. Для произвольной комплексной переменной $z = x + iy$ функция e^z определяется затем при помощи равенства

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y); \tag{6}$$

$e^{i\theta}$ есть комплексная функция (принимающая комплексные значения) от действительного аргумента θ. Когда θ изменяется непрерывно на полуинтервале $0 \leqslant \theta < 2\pi$, точка $e^{i\theta}$ описывает непрерывно окружность радиуса 1 с центром в 0. Таким образом, $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. Ясно, что $e^{i\theta}$ — периодическая функция периода 2π: $e^{i(\theta + 2\pi)} = e^{i\theta}$. Она подчиняется свойствам

$$e^{i(\theta+\theta_1)} = e^{i\theta} e^{i\theta_1}, \quad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}, \tag{7}$$

каковы бы ни были θ и θ_1, потому, что

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{i\theta_1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = \\ &= (\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) + i(\cos\theta\sin\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta) = \\ &\qquad = \cos(\theta + \theta_1) + i\sin(\theta + \theta_1) = e^{i(\theta+\theta_1)}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.$$

Из (7) следует еще, что $e^{i(\theta-\theta_1)} = e^{i\theta} e^{-i\theta_1} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta_1}}$. Из сказанного выше следует, что всякое комплексное число представимо в (тригонометрической) форме: $a = \rho e^{i\theta}$, где $\rho \geqslant 0$ — единственное число, равное $|a|$, а $\theta = \operatorname{Arg} a$, определено с точностью до слагаемого $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$).

Имеет место неравенство

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \tag{8}$$

*) Впрочем, иногда удобно аргументом a в приведенной форме называть число θ, определяемое равенством (3), для которого $\alpha_0 \leqslant \theta < \alpha_0 + 2\pi$ или $\alpha_0 < \theta \leqslant \alpha_0 + 2\pi$, где α_0 — произвольно выбранное число.

и вытекающее из него другое неравенство

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b|, \tag{9}$$

каковы бы ни были комплексные a и b. Геометрически они выражают (рис. 8.2), что сторона треугольника не больше суммы его остальных сторон и не меньше их разности. На языке компонент чисел $a=\alpha+i\beta$, $b=\alpha_1+i\beta_1$ неравенство (8) сводится к неравенству (см. § 6.2, (9))

$$\sqrt{(\alpha+\alpha_1)^2+(\beta+\beta_1)^2} \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}.$$

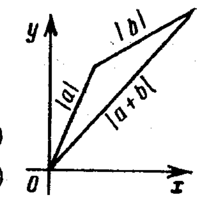

Рис. 8.2.

Справедливы также равенства

$$|ab|=|a||b|, \tag{10}$$

$$\operatorname{Arg}(ab)=\operatorname{Arg}a+\operatorname{Arg}b+2k\pi, \tag{11}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \quad b\neq 0, \tag{12}$$

$$\operatorname{Arg}\frac{a}{b}=\operatorname{Arg}a-\operatorname{Arg}b+2k\pi, \quad (k=0, \pm 1, \ldots). \tag{13}$$

Равенство (11) надо понимать в том смысле, что в качестве аргументов a, b, ab можно взять любые допустимые числа θ_1, θ_2, θ, и тогда окажется, что θ отличается от $\theta_1+\theta_2$ на величину $2k\pi$, где k — некоторое целое.

Докажем (10) и (11). Пусть $a=\rho_1 e^{i\theta_1}$, $b=\rho_2 e^{i\theta_2}$, $ab=\rho e^{i\theta}$, где θ_1, θ_2, θ — какие-то определенные (но произвольные) допустимые аргументы a, b, ab. Тогда

$$\rho e^{i\theta}=\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

и на основании единственности представления комплексного числа в показательной форме $\rho=\rho_1\rho_2$, $\theta=\theta_1+\theta_2+2k\pi$, где k — некоторое целое.

Если комплексное число $a=\alpha+i\beta$, то число $\bar{a}=\alpha-i\beta$ называется *сопряженным* к a. Таким образом, если $a=\alpha$ — действительное, то $\bar{a}=\alpha$.

Имеем

$$\overline{a\pm b}=\bar{a}\pm\bar{b}, \quad \overline{ab}=\bar{a}\bar{b}, \quad \overline{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \quad (b\neq 0), \tag{14}$$

потому что, если $a=\alpha_1+i\beta_1=\rho_1 e^{i\theta_1}$, $b=\alpha_2+i\beta_2=\rho_2 e^{i\theta_2}$, то

$$\overline{a\pm b}=\overline{(\alpha_1\pm\alpha_2)+(\beta_1\pm\beta_2)i}=(\alpha_1\pm\alpha_2)-(\beta_1\pm\beta_2)i=$$

$$=(\alpha_1-\beta_1 i)\pm(\alpha_2-\beta_2 i)=\bar{a}\pm\bar{b},$$

$$\overline{ab}=\overline{\rho\rho_1 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}=\rho_1\rho_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}=\rho_1 e^{-i\theta_1}\rho_2 e^{-i\theta_2}=\bar{a}\bar{b}.$$

Рассмотрим задачу о вычислении корня n-й степени из числа $a=\rho e^{i\theta}$ $(\rho>0)$. Требуется, таким образом, найти все числа $b=re^{i\varphi}$ такие, что $b^n=a$. Но тогда $r^n e^{in\varphi}=\rho e^{i\theta}$ $(r,\ \rho>0)$ и, вследствие единственности представления комплексного числа в показательной форме, $\rho=r^n$, $n\varphi=\theta+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \ldots$ Из первого равенства следует $r=\sqrt[n]{\rho}>0$ (r — арифметическое значение корня n-й степени из положительного числа ρ). Из второго же, что $\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \ldots)$.

Значения φ, дающие различные корни n-й степени из a, соответствуют только n значениям k:

$$\varphi_k=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\quad (k=0,1,\ \ldots,\ n-1). \tag{15}$$

Остальным целым k соответствуют значения φ, отличающиеся от одного из значений (15) на величину, кратную 2π.

Мы доказали, что у комплексного числа $a\neq0$ существует n (и только n) корней степени n, записываемых по формуле:

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\varphi_k}\quad (k=0,1,\ \ldots,\ n-1),$$

где φ_k определяются равенствами (15).

Пример.

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=D_n(x), \tag{16}$$

$$\sin x+\ldots+\sin nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{17}$$

Если в равенстве

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=\frac{e^{i(n+1)x}-e^{ix}}{e^{ix}-1}=\frac{e^{i(n+(1/2))x}-e^{ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}=$$
$$=\frac{\sin(n+(1/2))x}{2\sin(x/2)}-\frac{1}{2}+i\,\frac{\cos(x/2)-\cos(n+(1/2))x}{2\sin(x/2)}$$

приравнять действительные и мнимые части, то получим (16) и (17). Обе суммы, (16) и (17), имеют большое значение в теории рядов Фурье; функция (16) называется *суммой* или *ядром Дирихле*.

§ 8.3. Предел последовательности комплексных чисел. Функция комплексного переменного

По определению, последовательность комплексных чисел $z_n=\alpha_n+i\beta_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ имеет своим пределом комплексное число $z_0=\alpha_0+i\beta_0$, если

$$|z_n-z_0|=\sqrt{(\alpha_n-\alpha_0)^2+(\beta_n-\beta_0)^2}\to 0\quad (n\to\infty) \tag{1}$$