Рассмотрим задачу о вычислении корня n-й степени из числа $a=\rho e^{i\theta}$ $(\rho>0)$. Требуется, таким образом, найти все числа $b=re^{i\varphi}$ такие, что $b^n=a$. Но тогда $r^n e^{in\varphi}=\rho e^{i\theta}$ $(r,\ \rho>0)$ и, вследствие единственности представления комплексного числа в показательной форме, $\rho=r^n$, $n\varphi=\theta+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \ldots$ Из первого равенства следует $r=\sqrt[n]{\rho}>0$ (r — арифметическое значение корня n-й степени из положительного числа ρ). Из второго же, что $\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,\ \pm1,\ \ldots)$.

Значения φ, дающие различные корни n-й степени из a, соответствуют только n значениям k:

$$\varphi_k=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,1,\ldots,n-1). \tag{15}$$

Остальным целым k соответствуют значения φ, отличающиеся от одного из значений (15) на величину, кратную 2π.

Мы доказали, что у комплексного числа $a\neq0$ существует n (и только n) корней степени n, записываемых по формуле:

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\varphi_k}\quad(k=0,1,\ldots,n-1),$$

где φ_k определяются равенствами (15).

Пример.

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=D_n(x), \tag{16}$$

$$\sin x+\ldots+\sin nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{17}$$

Если в равенстве

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=\frac{e^{i(n+1)x}-e^{ix}}{e^{ix}-1}=\frac{e^{i(n+(1/2))x}-e^{ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}=$$

$$=\frac{\sin(n+(1/2))x}{2\sin(x/2)}-\frac{1}{2}+i\,\frac{\cos(x/2)-\cos(n+(1/2))x}{2\sin(x/2)}$$

приравнять действительные и мнимые части, то получим (16) и (17). Обе суммы, (16) и (17), имеют большое значение в теории рядов Фурье; функция (16) называется *суммой* или *ядром Дирихле*.

§ 8.3. Предел последовательности комплексных чисел. Функция комплексного переменного

По определению, последовательность комплексных чисел $z_n=\alpha_n+i\beta_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ имеет своим пределом комплексное число $z_0=\alpha_0+i\beta_0$, если

$$|z_n-z_0|=\sqrt{(\alpha_n-\alpha_0)^2+(\beta_n-\beta_0)^2}\to0\quad(n\to\infty) \tag{1}$$

или, что, очевидно, все равно, если одновременно $\alpha_n \to \alpha_0$ и $\beta_n \to \beta_0$ $(n \to \infty)$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ или $z_n \to z_0$.

Нетрудно видеть, сводя вопрос к рассмотрению действительной и мнимой компонент z_n, что для последовательности $\{z_n\}$, так же как для действительных последовательностей, имеет место условие Коши существования предела: для того чтобы последовательность $\{z_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое N, чтобы для всех n, $n' > N$ выполнялось неравенство $|z_n - z_{n'}| < \varepsilon$.

Легко также доказывается, что из существования предела (1) следует, что $|z_n| \to |z_0|$ $(n \to \infty)$.

Имеют место также равенства

$$\left.\begin{aligned} \lim(z_n \pm z_{n'}) &= \lim z_n \pm \lim z_{n'}, \\ \lim(z_n z_{n'}) &= \lim z_n \lim z_{n'}, \\ \lim\frac{z_n}{z_{n'}} &= \frac{\lim z_n}{\lim z_{n'}} \quad (\lim z_{n'} \neq 0), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем, как обычно, предполагается существование пределов z_n и $z_{n'}$ и заключается существование пределов, стоящих в этих равенствах слева.

Пусть G есть некоторое множество комплексных чисел $z = x + iy$ (точек комплексной плоскости). Если в силу некоторого закона каждому $z \in G$ приведено в соответствие число w, вообще говоря, комплексное, то говорят, что этим определена на G *функция комплексной переменной* $w = f(z)$.

Для такой функции, так же как для функции действительной переменной, вводится понятие предела, непрерывности и производной.

Окрестностью z_0 называется множество точек z (комплексной плоскости), для которых при некотором δ выполняется неравенство

$$|z - z_0| < \delta. \tag{3}$$

Говорят, что число (комплексное) A есть *предел функции* f в точке z_0, и пишут

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \quad \text{или} \quad f(z) \to A, \ z \to z_0,$$

если f определена в некоторой окрестности этой точки, за исключением, быть может, ее самой, и если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(z) - A| < \varepsilon$ для всех z, удовлетворяющих неравенствам $0 < |z - z_0| < \delta$.

Это определение эквивалентно следующему: какова бы ни была последовательность $\{z_n\}$, $z_n \neq z_0$, сходящаяся к z_0, $\lim f(z_n) = A$.

Имеют место свойства:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{z\to z_0}\{u(z)\pm v(z)\} &= \lim_{z\to z_0} u(z) \pm \lim_{z\to z_0} v(z), \\ \lim_{z\to z_0}\{u(z)\,v(z)\} &= \lim_{z\to z_0} u(z) \lim_{z\to z_0} v(z), \\ \lim_{z\to z_0}\frac{u(z)}{v(z)} &= \frac{\lim\limits_{z\to z_0} u(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} v(z)} \left(\lim_{z\to z_0} v(z)\neq 0\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Они доказываются вполне аналогично тому, как это делается для функций действительной переменной (см. § 4.1, теорема 6).

Говорят, что функция f *непрерывна в точке* z^0, если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе и в ней самой, и если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z^0)$.

Конечно, из (4) следует, что сумма, разность, произведение и частное непрерывных в z^0 функций есть функция непрерывная в z^0 (при обычной оговорке для частного).

Говорят, что $f'(z_0)$ есть производная от f в точке z_0, если

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0). \quad (5)$$

Производная k-го порядка от f в точке z определяется по индукции:

$$f^{(k)}(z) = (f^{(k-1)}(z))' \quad (k = 2,\ 3,\ \ldots). \quad (6)$$

Справедливы равенства, доказываемые в точности так же, как в действительном случае:

$$\begin{gathered} [u(z) \pm v(z)]' = u'(z) \pm v'(z), \\ [u(z)\,v(z)]' = u(z)\,v'(z) + u'(z)\,v(z), \\ \left(\frac{u(z)}{v(z)}\right)' = \frac{v(z)\,u'(z) - u(z)\,v'(z)}{v(z)^2} \qquad (v(z)\neq 0), \end{gathered} \quad (7)$$

$$\left((z-a)^n\right)' = n(z-a)^{n-1} \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \quad (8)$$

Нам придется также иметь дело с комплекснозначными функциями от действительной переменной

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x) \quad (9)$$

(φ, ψ — действительные функции, определенные на некотором множестве действительных x). Функция $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(-\infty < \theta < \infty)$ может служить примером такой функции. Для таких функций естественно определяется производная и неопределенный интеграл:

$$f'(x) = \varphi'(x) + i\psi'(x), \tag{10}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(x)dx + i\int \psi(x)\,dx + C \tag{11}$$

(C — комплексная константа).

Из (11) следует равенство

$$\int (Af_1(x) + Bf_2(x))\,dx = A\int f_1(x)\,dx + B\int f_2(x)\,dx + C, \tag{12}$$

где A, B — комплексные константы, а f_1 и f_2 — комплекснозначные непрерывные функции.

Замечание. Пусть функция $f(z)$ задана на открытом множестве G точек z комплексной плоскости, пересекающемся с действительной осью x по некоторому интервалу (a, b) (рис. 8.3). Тогда f можно рассматривать также как функцию $f(x)$ от действительной переменной $x \in (a, b)$ (вообще, комплекснозначную). Если f имеет в точке $x \in (a, b)$ производную в смысле комплексного переменного, т. е. если существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x+\Delta z) - f(x)}{\Delta z} = f'(x)$, где Δz стремится к нулю, пробегая любые комплексные значения, то тем более f имеет равную ей производную в точке x в смысле действительного переменного, где требуется, чтобы существовал предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, когда Δx стремится к нулю, пробегая только любые действительные значения. Обратное утверждение неверно, как показывает пример функции $|z|$. Производная в смысле действительной переменной от нее в точке $x > 0$ существует и равна 1, между тем как производная от нее в той же точке в смысле комплексного переменного не существует потому, что отношение ($\Delta z = \rho e^{i\theta}$)

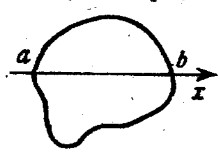

Рис. 8.3.

$$\frac{|x+\Delta z| - |x|}{\Delta z} = \frac{\sqrt{(x+\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2} - x}{\rho e^{i\theta}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 2x\rho\cos\theta + \rho^2} - x}{\rho e^{i\theta}} = \frac{(2x\rho\cos\theta + \rho^2)\frac{1}{2x} + o(\rho)}{\rho e^{i\theta}} = \frac{\cos\theta + o(1)}{e^{i\theta}} \to$$

$$\to \frac{\cos\theta}{e^{i\theta}} \quad (\rho \to 0) \tag{13}$$

не имеет определенного предела при $\rho = |\Delta z| \to 0$. Пределы существуют, когда $\Delta z \to 0$ по лучам, выходящим из нулевой точки, но они вообще разные для разных лучей. В третьем равенстве мы вынесли x за знак корня и затем применили равенство $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)$, $u \to 0$.