§ 8.4. Многочлены

В § 5.9 было уделено внимание многочленам степени n,

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0),$$

где коэффициенты a_k и переменная x считались действительными. В частности, была получена формула Тейлора

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

где производные понимались в смысле действительного переменного.

В этом парагарфе мы будем рассматривать более общие многочлены степени n,

$$Q(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0), \tag{1}$$

где a_k, вообще говоря, комплексные коэффициенты, а $z = x + iy$ — переменная, принимающая любые комплексные значения.

Если z в правой части (1) заменить на $(z - z_0) + z_0$, возвести в требуемые степени и привести подобные члены с одинаковыми степенями $(z - z_0)$, то $Q(z)$ представится в виде суммы по степеням $z - z_0$:

$$Q(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n. \tag{2}$$

Производная от $Q(z)$ порядка k (в комплексном смысле; см. § 8.3) равна $Q^{(k)}(z) = k!b_k + (k+1)\ldots 2(z - z_0) + \ldots$ Поэтому

$$b_k = \frac{Q^{(k)}(z_0)}{k!} \tag{3}$$

и

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \tag{4}$$

Мы получили формулу Тейлора для многочлена по степеням $(z - z_0)$. Из нее следует, что $Q(z)$ имеет единственное разложение вида (2): если два многочлена тождественно (т. е. для всех z) равны, то коэффициенты их при одинаковых степенях $(z - z_0)$ равны, потому что они определяются одними и теми же формулами (3). В частности, многочлен степени n, тождественно равный нулю, имеет все коэффициенты, равные нулю.

Если точка z_0 такова, что

$$Q(z_0) = Q'(z_0) = \ldots = Q^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad Q^{(k)}(z_0) \neq 0, \tag{5}$$

то Q можно представить в виде

$$Q(z) = (z - z_0)^k R(z) \qquad (R(z_0) \neq 0), \tag{6}$$

где R — многочлен степени $n-k$, и наоборот. Действительно, из (5) следует (6) на основании формулы Тейлора (4); с другой стороны, если верно (6), то помножим все члены разложения $R(z)$ по степеням $(z-z_0)$ на $(z-z_0)^k$ и сложим; тогда в силу единственности получим тейлорово разложение Q по степеням $(z-z_0)$, удовлетворяющее свойствам (5).

В случае (5), или, что все равно, (6), говорят, что z_0 есть *корень многочлена Q кратности k*. Можно еще сказать, что z_0 есть корень Q кратности k, если $Q(z)$ делится на $(z-z_0)^k$, но не делится на $(z-z_0)^{k+1}$.

Имеет место основная теорема алгебры, заключающаяся в следующем: *многочлен Q степени $n>0$ имеет по меньшей мере один комплексный корень.*

Из этой теоремы легко заключить, что на самом деле Q имеет n и только n корней, если учесть их кратность. В самом деле, пусть z_1 есть корень Q степени n. Кратность его обозначим через k_1. Тогда

$$Q(z)=(z-z_1)^{k_1}Q_1(z) \quad (Q_1(z_1)\neq 0),$$

где Q_1 — степени $n-k_1$. Если $n-k_1>0$, то по той же основной теореме у многочлена Q_1 найдется корень z_2 некоторой кратности k_2, и тогда

$$Q_1(z)=(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}Q_2(z) \quad (Q_2(z_1),\, Q_2(z_2)\neq 0).$$

Если Q_2 все еще будет иметь положительную степень, то продолжим эти рассуждения. После конечного числа этапов подобных рассуждений мы придем к тому, что $Q(z)$ имеет (разные) корни $z_1, \ldots, z_m$ соответственно кратностей $k_1, \ldots, k_m$, где $n=k_1+\ldots$ $\ldots+k_m$, и представляется в виде произведения

$$Q(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_m)^{k_m} \quad (a_n\neq 0,\ n=k_1+\ldots+k_m). \tag{7}$$

Других корней Q не имеет, потому что в силу (7) для всякого $z_0\neq z_j$ $(j=1, \ldots, m)$, очевидно, $Q(z_0)\neq 0$. Это показывает, что представление Q в виде произведения (7) единственно.

Остановимся еще на интересной связи между рассматриваемым многочленом $Q(z)$ и его производной $Q'(z)$. Она заключается в том, что *общий наибольший делитель $Q(z)$ и $Q'(z)$ есть многочлен, равный с точностью до постоянного не равного нулю множителя многочлену*

$$L(z)=(z-z_1)^{k_1-1}\ldots(z-z_m)^{k_m-1}. \tag{8}$$

В самом деле, z_j есть корень многочлена Q кратности k_j, и потому выполняются условия

$$Q(z_j)=Q'(z_j)=\ldots=Q^{(k_j-1)}(z_j)=0, \quad Q^{(k_j)}(z_j)\neq 0.$$

Отсюда для $\Lambda(z) = Q'(z)$ вытекают условия

$$\Lambda(z_j) = \ldots = \Lambda^{(k_j-2)}(z_j) = 0, \quad \Lambda^{(k_j-1)}(z_j) \neq 0,$$

говорящие, что z_j есть корень $Q'(z)$ кратности $k_j - 1$. Но в таком случае $(z - z_j)^{k_j-1}$ есть делитель как $Q(z)$, так и $Q'(z)$, а $(z - z_j)^{k_j}$ не является делителем $Q'(z)$. Так как это рассуждение *) можно провести для любого $j = 1, \ldots, m$, то это и доказывает, что многочлен L есть общий наибольший делитель Q и Q'. Если $k_j = 1$ при некотором j, то соответствующий множитель в (8) равен 1.

Заметим, что многочлен $L(z)$ всегда можно найти эффективно методом *алгоритма* Евклида, хотя его корни, быть может, так и останутся неизвестными.

Напомним этот метод. Пусть даны многочлены M_0 и M_1 степеней соответственно m и n, где $m \geqslant n$. Располагаем их члены по убывающим степеням z и делим M_0 на M_1. Получим частное и остаток M_2. Степень последнего ниже степени M_1. Затем делим M_1 на M_2, остаток обозначим через M_3 и т. д. Так как на каждом этапе этих рассуждений степень понижается по меньшей мере на 1, то в конце концов процесс оборвется — остаток окажется нулем. В результате получим цепочку:

$$M_0 = M_1R_0 + M_2, \quad M_1 = M_2R_1 + M_3, \ \ldots,$$
$$M_{l-2} = M_{l-1}R_{l-2} + M_l, \quad M_{l-1} = M_lR_{l-1},$$

где R_k — многочлены, а степени M_k с увеличением k понижаются. Из этих равенств, видно, что

$$\text{о. н. д. } (M_0, M_1) = \text{о. н. д. } (M_1, M_2) = \ldots = M_l,$$

и M_l есть общий наибольший делитель (о. н. д.) M_0 и M_1.

Отметим, что основная теорема алгебры доказывает только существование корня (вообще комплексного) у многочлена n-й степени, не давая эффективных методов нахождения его в общем случае. Впрочем, доказательство этой теоремы проводится методами математического анализа, а не алгебры, и если мы не доказываем здесь эту теорему, то потому, что она связана более органически с теорией функций комплексного переменного.

Существуют формулы решения общих уравнений второй, третьей и четвертой степеней. Для уравнений степени $n > 4$ таких формул нет. Абель **) доказал, что они не могут существовать. Это надо понимать в том смысле, что при $n > 4$ корни уравнения $a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ $(a_0 \neq 0)$ не выражаются через коэффициенты a_k посредством функций от этих коэффициентов, представляющих собой результат конечного числа операций

*) В этих рассуждениях о связи Q и Q' можно также считать, что коэффициенты Q и переменная x действительны. Именно этот случай найдет применение в § 8.7.

**) Н. Г. Абель (1802—1829) — выдающийся норвежский математик.

только следующего вида: сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня.

Многочлен $Q(z)$ [см. (1)] называется *действительным,* если все его коэффициенты действительны. Действительный многочлен, если его рассматривать для действительных $z=x$, есть действительная функция $Q(x)$, т. е. принимающая действительные значения.

Важное свойство действительного многочлена выражается в равенстве

$$\overline{Q(z)} = Q(\bar{z}), \tag{9}$$

верном для любого комплексного z. Оно устанавливается на основании формул § 8.2, (14) при помощи следующих выкладок, где надо учесть, что $\bar{a}_k = a_k$ (в силу действительности a_k):

$$\overline{Q(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = Q(\bar{z}).$$

Докажем теорему.

Теорема. *Если действительный многочлен $Q(z)$ имеет комплексный корень $z_0 = \alpha + i\beta$ кратности k, то он имеет также корень $\bar{z}_0 = \alpha - i\beta$, ему сопряженный той же кратности.*

Доказательство. По условию, $Q(z_0) = Q'(z_0) = \ldots$ $\ldots = Q^{(k-1)}(z_0) = 0$, $Q^{(k)}(z_0) \neq 0$. Легко видеть, что если $Q(z)$ есть действительный многочлен, то и его производная $Q^{(l)}(z)$ порядка l есть действительный многочлен. Поэтому в силу (9) $\overline{Q^{(l)}(z_0)} =$ $= Q^{(l)}(\bar{z}_0)$ для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$ и, следовательно,

$$Q(\bar{z}_0) = Q'(\bar{z}_0) = \ldots = Q^{(k-1)}(\bar{z}_0) = 0, \quad Q^{(k)}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

На основании этой теоремы и, принимая во внимание доказанное разложение [см. (7)] многочлена n-й степени $Q(z)$ на множители, действительный многочлен степени n $(a_n \neq 0)$ можно представить в виде произведения

$$Q(z) = a_n (z - a_1)^{l_1} \ldots (z - a_r)^{l_r} (z^2 + p_1 z + q_1)^{m_1} \ldots (z^2 + p_s z + q_s)^{m_s}, \tag{10}$$

где $a_1, \ldots, a_r, p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_s$ — действительные числа, многочлены $z^2 + p_j z + q_j$ имеют комплексные (попарно сопряженные) корни и $n = l_1 + \ldots + l_r + 2(m_1 + \ldots + m_s)$. Отметим, что числа $r, s, a_1, \ldots, a_r, p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_s, l_1, \ldots, l_r, m_1, \ldots, m_s$ определяются многочленом $Q(z)$ однозначно.

В самом деле, обратимся к разложению (7). Если среди входящих в него корней z_k имеются действительные, то мы их заново пронумеруем, обозначив через $a_1, \ldots, a_r$. Соответствующие степени биномов обозначим через $l_1, \ldots, l_r$.

Наряду с каждым множителем $(z-z_j)^{k_\mu}$ с комплексным корнем z_j, в произведении (7) на основании доказанной теоремы обязательно имеется также множитель вида $(z-\bar{z}_j)^{k_\nu}$, где $k_\mu = k_\nu = k$. Полагая $z_j = \alpha + \beta i$, $(\bar{z}_j = \alpha - \beta i)$, получим

$$(z-z_j)^k (z-\bar{z}_j)^k = (z-\alpha-\beta i)^k (z-\alpha+\beta i)^k =$$
$$= [(z-\alpha)^2+\beta^2]^k = (z^2+pz+q)^k,\ p=-2\alpha,\ q=\alpha^2+\beta^2, \tag{11}$$

где p и q — действительные числа.

Теперь остается только перенумеровать множители, соответствующие разным попарно сопряженным корням Q и заменить ими соответствующие множители (7). В результате получим (10).

§ 8.5. Разложение рациональной функции на простейшие дроби

В этом параграфе мы будем рассматривать произвольную действительную рациональную функцию

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

представляющую собой правильную дробь. Это значит, что P и Q — действительные многочлены, причем степень P меньше степени Q. Будем считать, что P имеет степень m, а Q — степень n, следовательно, $m < n$. При этом мы будем считать, что x — действительная переменная, таким образом, $f(x)$ есть действительная функция. Для краткости будем обозначать через s_P, s_Q, ... соответственно степени многочленов P, Q, ...

Лемма 1. *Пусть a — действительный корень кратности k знаменателя $Q(x)$ дроби* (1):

$$Q(x) = (x-a)^k N(x) \qquad (N(a) \neq 0). \tag{2}$$

Тогда существует и притом единственное разложение дроби (1) *в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{M(x)}{(x-a)^{k-1} N(x)}, \tag{3}$$

где A — постоянная, а второй член (3) *— правильная дробь.*

При этом A — действительное число, а $M(x)$ — действительный многочлен.

Единственность разложения (3) заключается в том, что существуют единственные числа A и многочлен $M(x)$, для которых имеет место (3).

Доказательство. Допустим, что разложение (3) имеет место, где A — некоторое постоянное число, а $M(x)$ — непрерывная функция. Приведя правую часть (3) к общему знаменателю и приравнивая полученный числитель к числителю левой части