Наряду с каждым множителем $(z - z_j)^{k_\mu}$ с комплексным корнем z_j, в произведении (7) на основании доказанной теоремы обязательно имеется также множитель вида $(z - \bar{z}_j)^{k_\nu}$, где $k_\mu = k_\nu = k$. Полагая $z_j = \alpha + \beta i$, $(\bar{z}_j = \alpha - \beta i)$, получим

$$(z - z_j)^k (z - \bar{z}_j)^k = (z - \alpha - \beta i)^k (z - \alpha + \beta i)^k =$$
$$= [(z - \alpha)^2 + \beta^2]^k = (z^2 + pz + q)^k, \ p = -2\alpha, \ q = \alpha^2 + \beta^2, \tag{11}$$

где p и q — действительные числа.

Теперь остается только перенумеровать множители, соответствующие разным попарно сопряженным корням Q и заменить ими соответствующие множители (7). В результате получим (10).

§ 8.5. Разложение рациональной функции на простейшие дроби

В этом параграфе мы будем рассматривать произвольную действительную рациональную функцию

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

представляющую собой правильную дробь. Это значит, что P и Q — действительные многочлены, причем степень P меньше степени Q. Будем считать, что P имеет степень m, а Q — степень n, следовательно, $m < n$. При этом мы будем считать, что x — действительная переменная, таким образом, $f(x)$ есть действительная функция. Для краткости будем обозначать через s_P, s_Q, ... соответственно степени многочленов P, Q, ...

Лемма 1. *Пусть a — действительный корень кратности k знаменателя $Q(x)$ дроби* (1):

$$Q(x) = (x - a)^k N(x) \qquad (N(a) \neq 0). \tag{2}$$

Тогда существует и притом единственное разложение дроби (1) *в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{M(x)}{(x-a)^{k-1} N(x)}, \tag{3}$$

где A — постоянная, а второй член (3) *— правильная дробь.*

При этом A — действительное число, а $M(x)$ — действительный многочлен.

Единственность разложения (3) заключается в том, что существуют единственные числа A и многочлен $M(x)$, для которых имеет место (3).

Доказательство. Допустим, что разложение (3) имеет место, где A — некоторое постоянное число, а $M(x)$ — непрерывная функция. Приведя правую часть (3) к общему знаменателю и приравнивая полученный числитель к числителю левой части

(3), получим равенство

$$P(x) = AN(x) + (x-a)M(x) \tag{4}$$

(верное не только для значений x, для которых $Q(x) \neq 0$, но, вследствие непрерывности левой и правой частей (4), и для всех действительных x). Положив в нем $x = a$, и учтя, что $N(a) \neq 0$, получим

$$A = \frac{P(a)}{N(a)}, \tag{5}$$

число A — действительное, потому что P и N — действительные многочлены и a — действительное. Подставив найденное значение A в (4), находим (единственным образом)

$$M(x) = \frac{P(x) - AN(x)}{x-a}. \tag{6}$$

Так как числитель (6) есть многочлен, где A подобрано так, чтобы он обращался в нуль при $x = a$, то он делится на $x - a$ и $M(x)$ есть многочлен (действительный). По условию s_P, $s_N \leqslant n-1$. Тогда в силу (6) $s_M \leqslant n-2$, т. е. s_M меньше $(n-1)$ — степени знаменателя второй дроби правой части (3), следовательно, эта дробь правильная.

Обратно, если число A и многочлен $M(x)$ определяются по формулам (5), (6), то, очевидно, выполняется равенство (3).

Замечание. Для произвольной не обязательно действительной правильной дроби (1) и комплексного a лемма 1 полностью верна, за исключением последнего ее утверждения — теперь уже число A вообще комплексное, так же как $M(x)$ есть не обязательно действительная функция.

Лемма 2. *Пусть $Q(x)$ представляется в виде*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^k N(x), \tag{7}$$

где p, q — действительные, $q - \frac{p^2}{4} > 0$, k — натуральное и $N(x)$ — многочлен (действительный), не имеющий своими корнями корни $x^2 + px + q$.

Тогда существует единственное разложение дроби (1) в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}N(x)}, \tag{8}$$

где A, B — постоянные, а вторая дробь в правой части (8) правильная.

Числа A, B и многочлен $M(x)$ — действительные.

Доказательство. Обозначим через $a = \alpha + i\beta$, $\bar{a} = \alpha - i\beta$ корни многочлена $x^2 + px + q$ $(\beta \neq 0)$. Из условия леммы следует, что они еще являются корнями кратности k нашего действительного многочлена $Q(x)$. Допустим, что разложение (8) имеет место.

Приведем правую часть (8) к общему знаменателю и приравняем числитель полученной дроби числителю левой части (8). В результате получим тождество

$$P(x) = (Ax + B)N(x) + (x^2 + px + q)M(x). \tag{9}$$

Подставив в него числа a и $\bar{a}$, получим

$$P(a) = (Aa + B)N(a),\ P(\bar{a}) = (A\bar{a} + B)N(\bar{a})$$

или

$$Aa + B = \frac{P(a)}{N(a)} = \Lambda, \quad A\bar{a} + B = \frac{P(\bar{a})}{N(\bar{a})} = \overline{\left(\frac{P(a)}{N(a)}\right)} = \bar{\Lambda} \tag{10}$$

(по условию, $N(a)$, $N(\bar{a}) \neq 0$). Определитель полученной системы, которую надо решить относительно A и B,

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ \bar{a} & 1 \end{vmatrix} = a - \bar{a} = 2\beta i \neq 0.$$

Поэтому система разрешима; при этом A и B — действительные числа. В последнем можно убедиться, не решая системы (10). Возьмем сопряженные величины от обеих частей уравнений (10):

$$\bar{A}\bar{a} + \bar{B} = \bar{\Lambda}, \quad \bar{A}a + \bar{B} = \Lambda. \tag{10'}$$

Системы (10) и (10′) равносильны, поэтому их (единственные) решения также должны совпадать: $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$. Но тогда A и B — действительны.

Подставляем теперь в (9) полученные числа A и B и находим, что

$$M(x) = \frac{P(x) - (Ax + B)N(x)}{x^2 + px + q}.$$

Так как числитель полученной дроби обращается в нуль в корнях $x^2 + px + q$ (так были подобраны A и B), то он делится на знаменатель без остатка и $M(x)$ есть многочлен, очевидно, действительный. Не представляет труда выяснить, что вторая дробь в правой части (8) правильная. Лемма доказана.

С помощью лемм 1 и 2 нам удастся *разложить* нашу *действительную дробь в конечную сумму* так называемых *простейших рациональных дробей.* Напомним, что так как $Q(x)$ есть действительный многочлен степени n, то для него, как было доказано в предыдущем параграфе, справедливо разложение на множители вида § 8.4, (10). Пользуясь леммой 1 и леммой 2, на основании этого разложения можно утверждать, что наша правильная дробь может быть записана последовательно в виде (пояснения ниже)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{l_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1}} + \frac{M_1(x)}{(x-a_1)^{l_1-1}N_1(x)} = \tag{11}$$

$$= \frac{A_{l_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1}} + \frac{A_{l_1-1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1-1}} + \frac{M_2(x)}{(x-a_1)^{l_1-2}N_1(x)} = \ldots = \tag{12}$$

$$= \frac{A_{l_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)} + \frac{M_{l_1}(x)}{(x-a_2)^{l_2}N_2(x)} = \tag{13}$$

$$= \ldots = \frac{A_{l_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{l_r}^{(r)}}{(x-a_r)^{l_r}} +$$

$$+ \ldots + \frac{A_1^{(r)}}{x-a_r} + \frac{B_{m_1}^{(1)}x + C_{m_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}} + \ldots + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{m_s}^{(s)}x + C_{m_s}^{(s)}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s}} + \ldots + \frac{B_1^{(s)}x + C_1^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s}, \tag{14}$$

где константы A, B, C с соответствующими индексами *единственны и действительные.*

Соотношение (11) получено на основании леммы 1; при этом многочлен $N_1(x)$ (действительный) определен из равенства

$$Q(x) = (x-a_1)^{l_1} N_1(x) \quad (N_1(a_1) \neq 0). \tag{15}$$

Переход от (11) к (12) снова осуществляется при помощи леммы 1, что законно, потому что вторая дробь в правой части (11) действительная и правильная и $N_1(a_1) \neq 0$. В (13) процесс выделения простейших дробей, соответствующих действительному корню a_1, закончился, дальше точками ниже (13) отмечается продолжение этого процесса для других действительных корней, а затем для комплексных корней Q, где уже последовательно применяется лемма 2.

Конечно, этот процесс мы изобразили в общем случае — могло, например, случиться, что у Q простых корней вовсе нет, тогда наш процесс сразу же начался бы с применения леммы 2.

Единственность чисел A, B, C в разложении (14) пока полностью не доказана, потому что нахождение их было связано с определенным процессом. Быть может, при другом способе определения A, B, С эти числа будут другими? Мы изложим ниже метод нахождения A, B, C путем сравнения коэффициентов. При обосновании его выяснится, что эти числа образуют единственную систему.

Мы уже доказали, применяя леммы 1 и 2, что при данном многочлене $Q(x)$, каков бы ни был многочлен $P(x)$, где $s_P < s_Q$, существует система чисел A, B, C, ..., для которой имеет место тождество (14) (для всех действительных x, отличных от корней Q). Приведем (14) к общему знаменателю, соберем коэффициенты при одинаковых степенях и полученные линейные комбинации из A, B, C, ... приравняем коэффициентам многочлена $P(x)$, имеющим соответственно одинаковые степени. В результате получим систему из n *линейных* уравнений относительно неизвестных A, B, C, ... Количество уравнений и неизвестных здесь совпадает. Уже известно, что эта система имеет решение для любого многочлена $P(x)$ (т. е. для любой правой части системы!) — мы это доказали при помощи лемм 1 и 2. Поэтому определитель системы заведомо не равен нулю и, следовательно, числа A, B, C, ... образуют единственную систему.

Пример. На основании сказанного выше имеет место равенство

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+x+1)(x-2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{x-2}. \tag{16}$$

Точнее, для любого многочлена третьей степени ax^3+bx^2+cx+d существуют постоянные A, B, C, D такие, что для всех $x\neq 2$ выполняется равенство (16). Чтобы найти эти постоянные, приведем правую часть (16) к общему наименьшему знаменателю. Числители обеих частей полученного равенства должны быть равны:

$$ax^3+bx^2+cx+d=(Ax+B)(x-2)^2+C(x^2+x+1)+$$
$$+D(x^2+x+1)(x-2)$$

для $x\neq 2$, но вследствие непрерывности функций, входящих в это равенство, и для $x=2$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим линейную систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными A, B, C, D:

$$a=A+D,\quad c=4A-4B+C-D,$$
$$b=B-4A+C-D,\quad d=4B+C-2D.$$

Мы уже знаем, что для любых a, b, c, d эта система имеет решение, но тогда, как известно из теории линейных уравнений, числа A, B, C, D, решающие систему, единственны.

Дадим еще другое разложение P/Q на простейшие дроби, основанное на применении только леммы 1.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ суть различные (комплексные и действительные) корни Q кратностей $k_1, \ldots, k_m$. Будем последовательно отделять от P/Q соответствующие этим корням простейшие дроби вида $A/(x-\lambda)^j$, применяя только лемму 1 и примечание к ней. В результате получим разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-\lambda_1)}+\ldots+\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-\lambda_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(m)}}{x-\lambda_m}+\ldots+\frac{A_{k_m}^{(m)}}{(x-\lambda_m)^{k_m}}, \tag{17}$$

где числа A теперь уже, вообще говоря, комплексные.

Чтобы получить выражения для коэффициентов, соответствующих, например, корню λ_1, помножим обе части этого равенства на $(x-\lambda_1)^{k_1}$. Тогда получим

$$(x-\lambda_1)^{k_1}\frac{P(x)}{Q(x)} =$$
$$= A_{k_1}^{(1)} + A_{k_1-1}^{(1)}(x-\lambda_1) + \ldots + A_1^{(1)}(x-\lambda_1)^{k_1-1} + (x-\lambda_1)^{k_1} R(x), \tag{18}$$

где $R(x)$ — функция, имеющая производные любого порядка в точке λ_1.

Поэтому очевидно, что

$$A_{k_1-\mu}^{(1)} = \lim_{x\to\lambda_1}\frac{1}{\mu!}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left\{(x-\lambda_1)^{k_1}\frac{P(x)}{Q(x)}\right\}, \tag{19}$$

что, в частности, показывает, что числа A единственны. Формула (19) может быть полезной в практических вычислениях.

Отметим, что разложение (17), очевидно, имеет место (см. примечание к лемме 1) для любой правильной дроби P/Q, не обязательно действительной. Однако в случае действительной дроби P/Q имеет место определенная закономерность, которая нарушается в случае недействительной дроби. Мы имеем в виду следующий факт: в разложении (17) действительной дроби P/Q у слагаемых $A/(x-\lambda)^j$ при действительных λ константы A действительны, а при комплексном λ наряду со слагаемым $A/(x-\lambda)^j$ обязательно имеется такое слагаемое $\overline{A}/(x-\overline{\lambda})^j$. Этот факт является характерным для разложения *действительной* дроби в виде (17).

В самом деле, можно написать

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\lambda)^k} + \frac{B}{(x-\overline{\lambda})^k} + \ldots \tag{20}$$

Применяя к этому равенству операцию сопряжения и учитывая, что дробь P/Q и переменная x действительные, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\overline{A}}{(x-\overline{\lambda})^k} + \frac{\overline{B}}{(x-\lambda)^k} + \ldots \tag{21}$$

В силу единственности разложения из (20) и (21) следует, что $\overline{A} = B$. Заметим, что сумма (x — действительное) $\frac{A}{(x-\lambda)^k} + \frac{\overline{A}}{(x-\overline{\lambda})^k}$ есть действительная функция от x, потому что она состоит из сопряженных друг другу слагаемых.