§ 8.6. Интегрирование рациональных дробей

Пусть нужно найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \tag{1}$$

от рациональной действительной дроби на интервале, не содержащем в себе ни одного действительного корня $Q(x)$. На таком интервале функция $P(x)/Q(x)$ непрерывна и имеет смысл говорить о ее первообразной. Если степень s_P многочлена P не меньше степени s_Q ($s_P \geqslant s_Q$), то прежде всего разделим P на Q по известным правилам:

$$\frac{P}{Q} = R + \frac{P_1}{Q}.$$

Многочлен R интегрируется без труда, а P_1/Q — правильная действительная дробь. Все трудности сводятся к интегрированию правильной дроби, которую мы снова обозначим через P/Q.

Будем считать, что Q представляется в виде произведения § 8.4, (10). Тогда P/Q можно разложить на простейшие дроби по формуле § 8.5, (14), каждая из которых, как мы знаем, может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Мы доказали, что принципиально всякая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях. Практически полное интегрирование (1) можно довести до конца в случае, если известны все корни Q и их кратности. Но мы уже говорили в § 8.4, что это не всегда удается узнать. В связи с этим всякого рода упрощения интеграла (1) являются очень ценными.

Об одном важном таком упрощении, предложенном Остроградским, будет идти речь в § 8.7.

§ 8.7. Метод Остроградского *) выделения рациональной части из интеграла

Допустим, что надо вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx, \tag{1}$$

где P/Q — правильная действительная рациональная функция (правильная действительная дробь) и Q степени n. Чтобы уяснить метод, проведем сначала чисто теоретические рассуждения.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — разные (действительные и комплексные) корни Q кратностей соответственно $k_1, \ldots, k_m$. Разложим P/Q по схеме § 8.5, (17). Это разложение можно записать в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum \frac{A}{(x-\lambda)^k}, \tag{2}$$

*) М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик, академик.