§ 8.6. Интегрирование рациональных дробей

Пусть нужно найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \tag{1}$$

от рациональной действительной дроби на интервале, не содержащем в себе ни одного действительного корня $Q(x)$. На таком интервале функция $P(x)/Q(x)$ непрерывна и имеет смысл говорить о ее первообразной. Если степень s_P многочлена P не меньше степени s_Q $(s_P \geqslant s_Q)$, то прежде всего разделим P на Q по известным правилам:

$$\frac{P}{Q} = R + \frac{P_1}{Q}.$$

Многочлен R интегрируется без труда, а P_1/Q — правильная действительная дробь. Все трудности сводятся к интегрированию правильной дроби, которую мы снова обозначим через P/Q.

Будем считать, что Q представляется в виде произведения § 8.4, (10). Тогда P/Q можно разложить на простейшие дроби по формуле § 8.5, (14), каждая из которых, как мы знаем, может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Мы доказали, что принципиально всякая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях. Практически полное интегрирование (1) можно довести до конца в случае, если известны все корни Q и их кратности. Но мы уже говорили в § 8.4, что это не всегда удается узнать. В связи с этим всякого рода упрощения интеграла (1) являются очень ценными.

Об одном важном таком упрощении, предложенном Остроградским, будет идти речь в § 8.7.

§ 8.7. Метод Остроградского*) выделения рациональной части из интеграла

Допустим, что надо вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx, \tag{1}$$

где P/Q — правильная действительная рациональная функция (правильная действительная дробь) и Q степени n. Чтобы уяснить метод, проведем сначала чисто теоретические рассуждения.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — разные (действительные и комплексные) корни Q кратностей соответственно $k_1, \ldots, k_m$. Разложим P/Q по схеме § 8.5, (17). Это разложение можно записать в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum \frac{A}{(x-\lambda)^k}, \tag{2}$$

*) М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик, академик.

где на самом деле, конечно, A, λ и k должны быть снабжены соответствующими индексами.

Запишем его еще в таком виде:

$$\frac{P}{Q}=\sum\frac{A}{x-\lambda}+\sum_{k>1}\frac{A}{(x-\lambda)^k}, \tag{3}$$

где в первую сумму входят дроби с первой степенью $(x-\lambda)$, а во вторую — остальные простейшие дроби. Как первая сумма, так и вторая являются действительными функциями от x, хотя отдельные их слагаемые, вообще говоря, комплексные (см. конец § 8.5).

Первую сумму приведем к общему знаменателю:

$$\frac{N(x)}{K(x)}=\sum\frac{A}{x-\lambda}=\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_{m-1}x^{m-1}}{(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_m)} \tag{4}$$

(N/K — правильная действительная дробь). Вторая сумма полностью интегрируется и притом в рациональных функциях:

$$\int\sum_{k>1}\frac{A}{(x-\lambda)^k}dx=\sum_{k>1}\frac{A}{(1-k)(x-\lambda)^{k-1}}+C=$$
$$=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_{n-m-1}x^{n-m-1}}{(x-\lambda_1)^{k_1-1}\ldots(x-\lambda_m)^{k_m-1}}+C=\frac{M(x)}{L(x)}+C. \tag{5}$$

Мы произвели почленное интегрирование, вообще говоря, комплексозначных функций (см. § 8.3, (12)). Но в результате получили действительную функцию, потому что слагаемые, из которых она состоит, действительные или попарно сопряженные. M/L, очевидно, есть правильная дробь. C мы считаем действительной константой.

В силу сказанного, если проинтегрировать равенство (3), получим

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{M(x)}{L(x)}+\int\frac{N(x)\,dx}{K(x)}, \tag{6}$$
$$K(x)=(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_m), \tag{7}$$
$$L(x)=(x-\lambda_1)^{k_1-1}\ldots(x-\lambda_m)^{k_m-1} \tag{8}$$

(константу в правой части (6) относим за счет стоящего там неопределенного интеграла).

Итак, мы доказали, что при заданном Q и любом многочлене $p_0+p_1x+\ldots+p_{n-1}x^{n-1}=P(x)$ можно найти такие числа a_0, a_1, ..., a_{n-m-1}; b_0, ..., b_{m-1} (количество их n), что для многочленов $M(x)$ и $N(x)$, имеющих эти числа своими коэффициентами, выполняется равенство (6), где M/L, N/K — правильные дроби.

Покажем, как находить M и N. Для этого продифференцируем (6):

$$\frac{P}{Q}=\left(\frac{M}{L}\right)'+\frac{N}{K}=\frac{M'}{L}-\frac{1}{L}\frac{ML'}{L}+\frac{N}{K}.$$

Отсюда, приводя правую часть к общему знаменателю $Q=LK$ и приравнивая числители обеих частей, получим

$$P=KM'-\frac{MKL'}{L}+LN. \tag{9}$$

Но K и L выражаются формулами (7), (8), а L' имеет множитель $(x-\lambda_1)^{k_1-2}\ldots(x-\lambda_m)^{k_m-2}$ $(k_j>1)$, поэтому KL' делится на L и KL'/L есть многочлен.

Теперь мы складываем многочлены в правой части (9), приводим подобные при одинаковых степенях x и приравниваем их соответствующим коэффициентам p_k многочлена P. В результате получим алгебраическую линейную систему уравнений

$$\alpha_0^k a_0+\ldots+\alpha_{n-m-1}^k a_{n-m-1}+\beta_0^k b_0+\ldots+\beta_{m-1}^k b_{m-1}=p_k, \tag{10}$$
$$(k=0,\ldots,n)$$

относительно искомых a_i, b_j. Она линейная, потому что правая часть (9) линейно зависит от многочленов M', L', N, которые только и содержат a_i, b_j.

Коэффиценты α_i^k, β_j^k системы (10) известны, они определяются данным многочленом Q. Они действительны. Определитель системы (10) заведомо не равен нулю. Это следует из того факта, что каждой правой части (10) соответствует определенный многочлен $P(x)$, которому в свою очередь соответствуют числа A разложения (2), из которых при помощи (4) и (5) определяются числа a_i, b_j, о которых мы доказали, что они удовлетворяют уравнениям (10). Иначе говоря, система (10) имеет решение для каждой правой части, откуда определитель ее не равен нулю.

Заметим, что мы раскладывали Q на множители и вводили числа A, только, чтобы обосновать метод. Многочлен L можно получить при помощи алгоритма Евклида, а многочлен K — делением P на L. Для этого не нужно знать корни Q. Чтобы получить систему (10), мы записываем искомые многочлены M и N в виде

$$M(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-m-1}x^{n-m-1},$$
$$N(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_{m-1}x^{m-1},$$

где коэффициенты a_i, b_j пока не известны, вставляем их в равенство (6), дифференцируем его и приравниваем коэффициенты числителей при одинаковых степенях x.

Что касается интеграла от N/K, то конечно, в нашем распоряжении имеются средства его полного интегрирования только при условии, что известны все корни K (они простые). С другой стороны, существуют приближенные методы интегрирования функций, не связанные с тем, интегрируется подынтегральная функция в элементарных функциях или нет. Если понадобится вычислить приближенно интеграл от рациональной функции P/Q, то чаще всего будет целесообразнее сначала выделить из него рациональную часть по методу Остроградского, а затем уже интегрировать оставшуюся часть N/K приближенно.

Отметим еще, что в разложении N/K на простейшие дроби (см. (4)) могут входить члены $A/(x-\lambda)$, соответствующие действительным λ. Их интегралы имеют вид

$$\int \frac{A}{x-\lambda}\,dx = A\ln|x-\lambda| + C.$$

Если же $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексное, то наряду со слагаемым $A/(x-\lambda)$ в сумму (4) входит еще слагаемое $\bar{A}/(x-\bar{\lambda})$. Их сумма

$$\frac{A}{x-\lambda} + \frac{\bar{A}}{x-\bar{\lambda}} = \frac{Bx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

где B, D — некоторые действительные числа. Интегрирование такой дроби, как мы знаем, приводит к $\ln$ и arctg. Таким образом, интегрирование рациональной дроби N/K приводит к трансцендентным (не рациональным) функциям ($\ln$, arctg).

Пример. Требуется найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$. Знаменатель в нем имеет кратные корни, и потому удобно применить метод Остроградского. Представляем интеграл в виде

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{x^3-1} + \int \frac{b_0+b_1x+a_2x^2}{x^3-1}\,dx,$$

где a_i, b_j — искомые постоянные. Дифференцируем это равенство и после приведения к общему знаменителю, равному $(x^3-1)^2$, приравниваем числители:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \left(\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{x^3-1}\right)' + \frac{b_0+b_1x+b_2x^2}{x^3-1},$$

$$1 = (x^3-1)(2a_2x+a_1) - 3x^2(a_0+a_1x+a_2x^2) + (x^3-1)(b_2x^2+b_1x+b_0).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему уравнений

$$b_2 = 0,\quad b_1 - a_2 = 0,\quad b_0 - 2a_1 = 0,\quad b_2 + 3a_0 = 0,$$
$$b_1 + 2a_2 = 0,\quad b_0 + a_1 = -1,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}.$$

Разлагаем теперь подынтегральную функцию справа на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}. \tag{11}$$

После приведения к общему знаменателю получим тождество (верное для любого x)

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

Подставляя в него $x=1$, получим $A=1/3$. Сравнивая коэффициенты при высшей степени x и члены, не содержащие x, получим еще $0=A+B$, $1=A-C$, откуда $B=-1/3$, $C=-2/3$. Остается подставить найденные A, B, C в (11) и проинтегрировать.

§ 8.8. Интегрирование алгебраических иррациональностей

Рациональную функцию от x, u, v, …, w (букв конечное число) мы будем обозначать символом $R(x, u, v, \ldots, w)$. Она получается в результате применения к x, u, …, w арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления), взятых в конечном числе.

Интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}\right)dx, \tag{1}$$

где λ, …, μ — рациональные числа, имеющие общий наименьший знаменатель m, при помощи подстановки ($ad-bc\neq 0$)

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{2}$$

сводится к интегралу от рациональной функции. В самом деле, x есть, очевидно, рациональная функция $\mu(t)$ от t, а вместе с ней рациональна и ее производная $\mu'(t)$. Поэтому, обозначая через p, …, q числители (целые числа) соответственно дробей λ, … …, μ, приведенных к общему знаменателю (m), получим, что интеграл после подстановки (2) сводится к следующему:

$$\int R\left(\mu(t), t^p, \ldots, t^q\right)\mu'(t)\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Примеры.

1. $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}=2\int(1+t^2)^3\,dt,\quad t=\sqrt{x-1},\ x=1+t^2,\ dx=2t\,dt.$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt=6\int\frac{t^3}{1+t}\,dt=$

$$=6\int(1-t+t^2)\,dt-6\int\frac{dt}{1+t},\quad x=t^6,\ dx=6t^5dt.$$