Разлагаем теперь подынтегральную функцию справа на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}. \tag{11}$$

После приведения к общему знаменателю получим тождество (верное для любого x)

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

Подставляя в него $x=1$, получим $A=1/3$. Сравнивая коэффициенты при высшей степени x и члены, не содержащие x, получим еще $0=A+B$, $1=A-C$, откуда $B=-1/3$, $C=-2/3$. Остается подставить найденные A, B, C в (11) и проинтегрировать.

§ 8.8. Интегрирование алгебраических иррациональностей

Рациональную функцию от $x, u, v, \ldots, w$ (букв конечное число) мы будем обозначать символом $R(x, u, v, \ldots, w)$. Она получается в результате применения к $x, u, \ldots, w$ арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления), взятых в конечном числе.

Интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}\right) dx, \tag{1}$$

где $\lambda, \ldots, \mu$ — рациональные числа, имеющие общий наименьший знаменатель m, при помощи подстановки $(ad-bc\neq 0)$

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{2}$$

сводится к интегралу от рациональной функции. В самом деле, x есть, очевидно, рациональная функция $\mu(t)$ от t, а вместе с ней рациональна и ее производная $\mu'(t)$. Поэтому, обозначая через $p, \ldots, q$ числители (целые числа) соответственно дробей $\lambda, \ldots$ $\ldots, \mu$, приведенных к общему знаменателю (m), получим, что интеграл после подстановки (2) сводится к следующему:

$$\int R\left(\mu(t), t^p, \ldots, t^q\right)\mu'(t)\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Примеры.

1. $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}=2\int(1+t^2)^3\,dt, \quad t=\sqrt{x-1},\ x=1+t^2,\ dx=2t\,dt.$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt=6\int\frac{t^3}{1+t}\,dt=$

$$=6\int(1-t+t^2)\,dt-6\int\frac{dt}{1+t},\quad x=t^6,\ dx=6t^5dt.$$