§ 8.9. Подстановки Эйлера

С помощью этих подстановок интеграл

$$\int R(x, y)\,dx \quad \left(y = \sqrt{a + bx + cx^2}\right) \quad (c \neq 0), \tag{1}$$

где $R(x, y)$ — рациональная функция от x, y приводится к интегралу от рациональной функции.

Первая подстановка соответствует случаю, когда корни α, β ($\alpha \neq \beta$) трехчлена $a + bx + cx^2$ действительны. Она имеет вид

$$t = \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{x - \alpha} = \frac{\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}}{x - \alpha}, \tag{2}$$

и тогда $t^2 = \dfrac{c(x-\beta)}{x-\alpha}$.

Эта подстановка совпадает с подстановкой (2), § 8,8.

Функция $x = \varphi(t)$, так же как ее производная φ', рациональная функция, поэтому

$$\int R(x, y)\,dx = \int R(\varphi(t), t[\varphi(t) - \alpha])\,\varphi'(t)\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где R_1 — рациональная функция.

Обратный переход от t к x осуществляется по формуле (2).

Вторая подстановка. Корни трехчлена $a + bx + cx^2$ комплексные. Тогда надо считать, что $c > 0$, иначе трехчлен был бы отрицательным для всех x. Полагаем

$$y = t \mp x\sqrt{c}. \tag{3}$$

Возводя это равенство в квадрат и заменяя y^2 его выражением, получим

$$a + bx = t^2 \mp 2tx\sqrt{c};$$

отсюда

$$x = \frac{t^2 - a}{b \pm 2t\sqrt{c}} = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt, \tag{4}$$

поэтому

$$\int R(x, y)\,dx = \int R\left(\varphi(t), t \mp \varphi(t)\sqrt{c}\right)\varphi'(t)\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Обратная подстановка

$$t = \sqrt{a + bx + cx^2} \pm x\sqrt{c}. \tag{5}$$

Отметим, что рассматриваемая подстановка годится и когда корни трехчлена $a + bx + cx^2$ действительны, лишь бы $c > 0$.

Замечание. Первой подстановке (3) $y=t-x\sqrt{c}$ соответствует функция (см. § 5.8, пример 3)

$$x=\frac{t^2-a}{b+2t\sqrt{c}}.$$

График ее распадается на две непрерывные ветви, соответствующие изменению t на интервалах $(-\infty, -b/2\sqrt{c})$ и $(-b/2\sqrt{c}, \infty)$. На обоих интервалах она строго монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Указанным ветвям соответствуют две обратные однозначные функции

$$t=x\sqrt{c}\pm\sqrt{a+bx+cx^2}.$$

Первая из них (со знаком $+$) была взята в качестве соответствующей подстановки (5) интеграла, а вторая отличается от другой подстановки (5) лишь знаком.

Отметим, что подстановка $x=1/z$ преобразует наш трехчлен при $a\neq 0$ в выражение $\sqrt{az^2+bz+c}/(\pm z)$, и следовательно, преобразует интеграл (1) в интеграл такого же типа. Здесь «$+$» или «$-$» ставится в зависимости от того, будет ли интервал изменения z частью луча $z>0$ или $z<0$. Вообще, эта подстановка разрывна: она переносит окрестность 0 в окрестность бесконечно удаленной точки, и наоборот. Поэтому непрерывная на оси x функция после такой подстановки делается разрывной при $z=0$, вообще с неустранимым разрывом. Если подынтегральная функция $R(x, y)$ в исходном интеграле уже имеет разрыв в точке $x=0$, то подстановка $x=1/z$ в указанном смысле не усложняет положение вещей.

Пример 1. (трехчлен имеет комплексные корни)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\int\frac{dx}{t-x}=\int\frac{dt}{(b/2)+t}=\ln\left|\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right|+C.$$

Делаем вторую подстановку:

$$\sqrt{a+bx+x^2}=t-x,\quad a+bx=t^2-2tx,$$

$$bdx=2t\,dt-2t\,dx-2x\,dt,\quad \frac{dx}{t-x}=\frac{2\,dt}{b+2t}.$$

В частности,

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,\quad (a\neq 0);$

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4}\right)-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}=\int\frac{\alpha\,dt}{\sqrt{\alpha^2-(\alpha t)^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin\frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}+C,\quad a+\frac{b^2}{4}=\alpha^2>0,\quad x-\frac{b}{2}=\alpha t;$$

3) трехчлен имеет комплексные корни (верхний знак здесь и далее соответствует положительным x или z); трехчлен может иметь и действительные корни, лишь бы они были различны.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+1}} = \mp \int \frac{dz}{\sqrt{a+bz+z^2}} =$$

$$= \mp \ln\left|\frac{b}{2} + z + \sqrt{a+bz+z^2}\right| + C = \mp \ln\left|\frac{b}{2} + \frac{1 \pm \sqrt{ax^2+bx+1}}{x}\right| + C;$$

4) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx-1}} = \mp \int \frac{dz}{\sqrt{a+bz-z^2}} =$$

$$= \mp \arcsin \frac{2z-b}{\sqrt{b^2+4a}} + C = \pm \arcsin \frac{bx-2}{x\sqrt{b^2-4a}} + C \ (b^2+4a>0);$$

в частности, $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mp \arcsin \frac{1}{x} + C;$

5) интегралы $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-m)\sqrt{a+bx+cx^2}}$

приводятся к предыдущим, если ввести новые переменные, соответственно, $z = \sqrt{|c|}\,x$, $z = \sqrt{|c|}\,(x-m)$.

§ 8.10. Биномиальные дифференциалы. Теорема Чебышева *)

Рассмотрим интеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx, \tag{1}$$

где a, b — произвольные, отличные от нуля числа, а m, n, p — рациональные числа. Подынтегральное выражение в (1) называется *биномиальным дифференциалом*.

Подстановка $x^n = t$, $x = t^{1/n}$, $dx = \frac{1}{n} t^{(1/n)-1} dt$ приводит (1) к виду

$$\frac{1}{n} \int t^{(m+1/n)-1} (a+bt)^p dt. \tag{2}$$

Если положить $((m+1)/n) - 1 = q$, то вопрос сводится к интегралу вида

$$\int t^q (a+bt)^p\, dt, \tag{3}$$

где p и q — рациональные.

Интеграл (3) всегда берется в элементарных функциях, если одно из чисел p, q, $p+q$ — целое (положительное, нуль или отрицательное).

---

*) П. Л. Чебышев (1821—1894) — великий русский математик и механик, академик.