Глава 9

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА*)

§ 9.1. Вводная часть и определение

Понятие определенного интеграла было введено в § 1.7. Читателю, возможно, следует возобновить в памяти то, что говорилось там. Эта глава начинается с формального определения определенного интеграла по Риману, изучаются его свойства и выясняются условия, которым должна удовлетворять функция, чтобы она была интегрируемой; даются также дальнейшие приложения определенного интеграла, излагается теория несобственных интегралов. Уже сейчас подчеркнем, что определенный интеграл в узком (собственном) смысле, требующий для своего определения одного предельного перехода, имеет смысл, как будет видно ниже, только для конечного отрезка и притом для ограниченных функций, непрерывных и некоторых разрывных. Для неограниченных функций риманов интеграл заведомо не существует. Однако можно ввести понятие несобственного интеграла по Риману, требующее для своего определения двойного предельного перехода. С его помощью корректно определяется площадь фигуры с границей, не слишком быстро растущей в бесконечность.

Другой несобственный интеграл определяется для функций, заданных на всей действительной оси. С его помощью можно вычислить работу силы, действующей на неограниченном интервале.

Зададим на конечном отрезке $[a, b]$ функцию f. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, и будем говорить, что произведено *разбиение* R (отрезка $[a, b]$). На каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения выберем по произвольной точке ξ_i ($\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$) и составим сумму

$$S_n = S_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i).$$

Ее называют *интегральной суммой* (Римана) функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующей разбиению R. Интегральная сумма определена неоднозначно, потому что зависит от выбора $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

*) Б. Ф. Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик.

По определению, *определенным интегралом* (*Римана*) *от* f *на* $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx = I, \qquad (1)$$

понимаемый в том смысле, что I есть такое число, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех разбиений R, у которых $\Delta x_i < \delta$, имеет место $|S_R - I| < \varepsilon$, независимо от выбора точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Другое эквивалентное определение предела (1) следующее: какова бы ни была последовательность разбиений $R^k = \{a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = b\}$ такая, что $\max \Delta x_i^k \to 0$, $k \to \infty$, при любом выборе для каждого k произвольных, но определенных точек $\xi_i^k \in [x_i^k, x_{i+1}^k]$, соответствующая интегральная сумма имеет предел

$$\lim_{k\to\infty} S_{R_k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(\xi_i^k)\,\Delta x_i^k = I$$

(не зависящий от выбора указанных R^k и ξ_i^k).

Эквивалентность этих двух пониманий предела (1) доказывается аналогично тому, как устанавливается эквивалентность пониманий предела функции на языке ε, δ и на языке последовательностей.

Факт существования интеграла можно еще выразить на языке критерия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для разбиений R и R' с частичными отрезками длины, не большей δ, имеет место $|S_R - S_{R'}| < \varepsilon$.

§ 9.2. Ограниченность интегрирующей функции

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.*

В самом деле, пусть f неограничена на $[a, b]$, и $S_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j$ — ее интегральная сумма, соответствующая произвольному разбиению R. Так как f неограничена на $[a, b]$, то она неограничена по крайней мере на одном из отрезков $[x_j; x_{j+1}]$ разбиения, пусть на $[x_{j_0}; x_{j_0+1}]$. Имеем

$$S_R = f(\xi_{j_0})\,\Delta x_{j_0} + \sum{}' f(\xi_j)\,\Delta x_j = f(\xi_{j_0})\,\Delta x_{j_0} + A,$$

где сумма Σ' распространена на все $j \neq j_0$. Мы считаем, что все входящие в нее ξ_j произвольны, но фиксированы. Отсюда $|S_R| \geqslant |f(\xi_{j_0})|\Delta x_{j_0} - |A|$. Зададим как угодно большее число N и