Теорема 4 (о замене переменной). *Справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{10}$$

где функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$, $a=\varphi(c)$, $b=\varphi(d)$ и значения $\varphi(t)$ $(c\leqslant t\leqslant d)$ принадлежат отрезку $[A, B]$, на котором $f(x)$ непрерывна. (Таким образом, $[a, b]\subset[A, B]$.)

В самом деле, пусть $F(x)$ и $\Phi(t)$ — соответственно первообразные функции $f(x)$ и $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Тогда (см. § 8.1, (2)) имеет место тождество $\Phi(t)=F[\varphi(t)]+C$, $c\leqslant t\leqslant d$, где C — некоторая постоянная. Теперь (10) следует из очевидного равенства

$$F(b)-F(a)=F[\varphi(d)]-F[\varphi(c)]=\Phi(d)-\Phi(c)$$

на основании теоремы Ньютона — Лейбница.

Пример 1. $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_0^\pi = 2$ в силу теоремы Ньютона — Лейбница; $\sin x$ непрерывна на $[0, \pi]$, $-\cos x$ ее первообразная.

Пример 2.

$$\int_a^b \operatorname{sign} t\,dt = |t|\,\Big|_a^b = |b|-|a| \tag{11}$$

в силу теоремы 2, потому что $|x|$ есть непрерывная кусочно гладкая (или гладкая, если $ab\geqslant 0$) функция на отрезке $[a, b]$, а $\operatorname{sign} x$ — ее производная, существующая всюду на $[a, b]$, за исключением точки $x=0$.

В частности, из (11) следует:

$$\int_0^x \operatorname{sign} t\,dt = |x|.$$

§ 9.10. Вторая теорема о среднем

Теорема. *Если функция φ — неотрицательная неубывающая на отрезке $[a, b]$, а f — интегрируемая на $[a, b]$, то существует точка $\xi\in\in[a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Будем сначала считать, что φ имеет непрерывную производную на $[a, b]$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = -\varphi(x)\int_x^b f(u)\,du\,\Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x)\int_x^b f(u)\,du\,dx =$$

$$= \varphi(a)\int_a^b f(u)\,du + \int_a^b \varphi'(x)\int_x^b f(u)\,du\,dx. \tag{2}$$

Пусть

$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} \int_x^b f(u)\,du, \quad M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_x^b f(u)\,du;$$

тогда правая часть (2), учитывая, что $\varphi(a)$, $\varphi'(x) \geqslant 0$, не больше чем $\left(\varphi(a) + \int_a^b \varphi'(x)\,dx\right) M = \varphi(b) M$, но не меньше, чем $\left(\varphi(a) + \int_a^b \varphi'(x)\,dx\right) m = \varphi(b) m$. Поэтому найдется $\xi \in [a, b]$, для которого выполняется равенство (1).

Если теперь φ — неубывающая неотрицательная функция, вообще говоря, разрывная, то она интегрируема на $[a, b]$ и существует последовательность непрерывно дифференцируемых неубывающих неотрицательных функций ψ_n, для которых (см. § 18.2, 5), том II)

$$\int_a^b |\varphi(x) - \psi_n(x)|\,dx \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

На основании уже доказанного при любом n найдется точка $\xi_n \in [a, b]$, для которой

$$\int_a^b \psi_n(x) f(x)\,dx = \varphi(b) \int_{\xi_n}^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Из последовательности $\{\xi_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\xi \in [a, b]$. Но тогда в силу непрерывности интеграла справа в (4) по нижнему пределу и того факта, что

$$\left| \int_a^b \psi_n f\,dx - \int_a^b \varphi f\,dx \right| \leqslant K \int_a^b |\psi_n - \varphi|\,dx \to 0, \quad n \to \infty, \quad K \geqslant |f(x)|,$$

из (4) после перехода к пределу при $n \to \infty$ следует (1).

§ 9.11. Видоизменение функции

Теорема. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то после видоизменения ее в конечном числе точек отрезка $[a, b]$ она останется интегрируемой без изменения величины интеграла.*

Доказательство. Ясно, что видоизмененная функция

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(x),$$

где φ равна нулю всюду на $[a, b]$, за исключением указанных в условии теоремы точек. Ясно также, что интеграл от φ на $[a, b]$ равен нулю. Поэтому f_1 интегрируема и

$$\int_a^b f_1 dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b \varphi\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

До сих пор при исследовании функции f на интегрируемость мы предполагали, что f задана во всех точках $[a, b]$. Из дока-