Пусть

$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} \int_x^b f(u)\,du, \quad M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_x^b f(u)\,du;$$

тогда правая часть (2), учитывая, что $\varphi(a)$, $\varphi'(x) \geqslant 0$, не больше чем $\left(\varphi(a) + \int_a^b \varphi'(x)\,dx\right) M = \varphi(b) M$, но не меньше, чем $\left(\varphi(a) + \int_a^b \varphi'(x)\,dx\right) m = \varphi(b) m$. Поэтому найдется $\xi \in [a, b]$, для которого выполняется равенство (1).

Если теперь φ — неубывающая неотрицательная функция, вообще говоря, разрывная, то она интегрируема на $[a, b]$ и существует последовательность непрерывно дифференцируемых неубывающих неотрицательных функций ψ_n, для которых (см. § 18.2, 5), том II)

$$\int_a^b |\varphi(x) - \psi_n(x)|\,dx \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

На основании уже доказанного при любом n найдется точка $\xi_n \in [a, b]$, для которой

$$\int_a^b \psi_n(x) f(x)\,dx = \varphi(b) \int_{\xi_n}^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Из последовательности $\{\xi_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\xi \in [a, b]$. Но тогда в силу непрерывности интеграла справа в (4) по нижнему пределу и того факта, что

$$\left| \int_a^b \psi_n f\,dx - \int_a^b \varphi f\,dx \right| \leqslant K \int_a^b |\psi_n - \varphi|\,dx \to 0, \quad n \to \infty, \quad K \geqslant |f(x)|,$$

из (4) после перехода к пределу при $n \to \infty$ следует (1).

§ 9.11. Видоизменение функции

Теорема. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то после видоизменения ее в конечном числе точек отрезка $[a, b]$ она останется интегрируемой без изменения величины интеграла.*

Доказательство. Ясно, что видоизмененная функция

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(x),$$

где φ равна нулю всюду на $[a, b]$, за исключением указанных в условии теоремы точек. Ясно также, что интеграл от φ на $[a, b]$ равен нулю. Поэтому f_1 интегрируема и

$$\int_a^b f_1 dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b \varphi\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

До сих пор при исследовании функции f на интегрируемость мы предполагали, что f задана во всех точках $[a, b]$. Из доказанной теоремы мы видим, что интегрируемость f не зависит от того, какие значения принимает f на конечной системе точек отрезка $[a, b]$. Но раз так, то можно и не предполагать, что f задана на этих точках. В этом смысле мы будем говорить об интегрируемости ограниченной функции на $[a, b]$, заданной на самом деле на множестве, полученном выбрасыванием из $[a, b]$ конечного числа точек, например, об интегрируемости $\sin(1/x)$ или $(\sin x)/x$ на $[0, 1]$. Обе эти функции непрерывны и ограничены только на $(0, 1]$, но говорят, что они интегрируемы на $[0, 1]$.

Если заданную на отрезке $[a, b]$ интегрируемую на нем функцию f видоизменить на счетном множестве точек, то видоизмененная функция f_1 сможет оказаться уже не интегрируемой. Например, функция $f(x) \equiv 1$ имеет интеграл Римана на $[0, 1]$, равный 1 (любая ее интегральная сумма равна 1). Но если ее значения в рациональных точках заменить на значения, равные 0, то получится функция f_1 Дирихле, не интегрируемая по Риману: любая ее верхняя сумма Дарбу равна 1, а нижняя равна 0. Однако это явление бывает не всегда.

Пусть e есть то множество, на котором мы видоизменили функцию f, интегрируемую на $[a, b]$, и f_1 — видоизмененная функция. Тогда $f(x) = f_1(x) + \varphi(x)$, где $\varphi(x) = 0$ на $[a, b] - e$. Если множество e такое, что для любой таким образом ему соответствующей ограниченной (!) функции φ существует интеграл $\int_a^b \varphi\, dx = 0$, то на таком множестве можно, очевидно, видоизменить функцию f, не нарушая ее интегрируемости, и тогда уже не важно, определена или нет на самом деле f на этом множестве. В таких случаях говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ существует на $[a, b]$, хотя функция f определена только на $[a, b] - e$.

Пример. Функция $\psi(x) = \sin(\sin(1/x))^{-1}$ определена на $[0, 1] - e$, где e — множество, состоящее из 0 и точек $x_k = 1/k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, очевидно, счетное. Если дополнить ψ на e любыми числовыми значениями, образующими, однако, ограниченное в совокупности множество, то получим определенную на $[0, 1]$ функцию $\psi_1(x)$, интегрируемую на $[0, 1]$, потому, что она ограничена на $[0, 1]$ и непрерывна всюду на $[0, 1]$ за исключением точек множества e, имеющего лебегову меру нуль.

Интегрируемость ψ вытекает также из следующей теоремы:

Теорема. *Функция f, ограниченная на $[a, b]$ и интегрируемая на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$, интегрируема на $[a, b]$.*

В этой формулировке $[a, x]$ можно заменить на $[x, b]$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $|f(x)| \leq M$ на $[a, b]$ и $\delta = \varepsilon/4M$. Так как f интегрируема на отрезке $[a, b-\delta]$, то существует его разбиение $R' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} = b - \delta\}$ такое, что

$$\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'} = \sum_{j=0}^{n-2} (M_j - m_j)\, \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Введем еще разбиение $R = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = (\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}) + (M_{n-1} - m_{n-1})\,\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \varepsilon,$$

что показывает (см. § 9.4, основная теорема), что f интегрируема на $[a, b]$.

В нашем примере ψ ограничена на $[0, 1]$ и интегрируема на любом отрезке $[\delta, 1]$, $\delta > 0$. Ведь на $[\delta, 1]$ она имеет не больше чем конечное число точек разрыва.

§ 9.12. Несобственные интегралы

Зададим на конечном полуинтервале $[a, b)$ функцию f. Допустим, что она интегрируема на любом отрезке $[a, b']$, где $b' < b$ и неограничена в окрестности точки b. Тогда ее интеграл на $[a, b)$ или, что все равно, на $[a, b]$ в обычном смысле (Римана), не может существовать, потому что интегрируемая на $[a, b]$ по Риману функция необходимо ограничена. Однако может случиться, что существует предел $\lim\limits_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$. Если это так, то этот предел называют *несобственным интегралом от f* на отрезке $[a, b]$ и записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx. \tag{1}$$

В таком случае говорят, что *интеграл* $\int\limits_a^b f\,dx$ *сходится*. В противном случае говорят, что он *расходится* или не существует как несобственный риманов интеграл.

Допустим теперь, что функция f задана на луче $[a, \infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b']$, где $a < b' < \infty$. Если существует предел

$$\lim_{b' \to \infty} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx,$$

то он называется *несобственным интегралом от f на* $[a, \infty)$ и обозначается так:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b' \to \infty} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Условимся в следующей терминологии. Выражение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$