Введем еще разбиение $R = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \left(\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}\right) + (M_{n-1} - m_{n-1})\,\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \varepsilon,$$

что показывает (см. § 9.4, основная теорема), что f интегрируема на $[a, b]$.

В нашем примере ψ ограничена на $[0, 1]$ и интегрируема на любом отрезке $[\delta, 1]$, $\delta > 0$. Ведь на $[\delta, 1]$ она имеет не больше чем конечное число точек разрыва.

§ 9.12. Несобственные интегралы

Зададим на конечном полуинтервале $[a, b)$ функцию f. Допустим, что она интегрируема на любом отрезке $[a, b']$, где $b' < b$ и неограничена в окрестности точки b. Тогда ее интеграл на $[a, b)$ или, что все равно, на $[a, b]$ в обычном смысле (Римана), не может существовать, потому что интегрируемая на $[a, b]$ по Риману функция необходимо ограничена. Однако может случиться, что существует предел $\lim\limits_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$. Если это так, то этот предел называют *несобственным интегралом от f* на отрезке $[a, b]$ и записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

В таком случае говорят, что *интеграл* $\int\limits_a^b f\,dx$ *сходится*. В противном случае говорят, что он *расходится* или не существует как несобственный риманов интеграл.

Допустим теперь, что функция f задана на луче $[a, \infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b']$, где $a < b' < \infty$. Если существует предел

$$\lim_{b' \to \infty} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx,$$

то он называется *несобственным интегралом от f на* $[a, \infty)$ и обозначается так:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b' \to \infty} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Условимся в следующей терминологии. Выражение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

будем называть *интегралом* (*от* f) *с особенностью в точке* b, если выполняются следующие условия: если b — конечная точка, то функция f интегрируема на $[a, b']$ при любом b', удовлетворяющем неравенствам $a < b' < b$ и, кроме того, неограничена в окрестности точки b. Если же $b = +\infty$, то про функцию f предполагается лишь, что она интегрируема на $[a, b']$ при любом конечном $b' > a$.

Подобным образом определяется интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с единственной особенностью в точке a. Теперь b — конечная точка. Если точка $a < b$ тоже конечна, то f в окрестности a неограничена и интегрируема на любом отрезке $[a', b]$, где $a < a' < b$. Если же $a = -\infty$, то функция f предполагается интегрируемой на $[a', b]$ для любого $a' < b$.

В дальнейшем мы будем для определенности рассматривать интеграл (2) с единственной особенностью в точке b, конечной или бесконечной. Все выводы по аналогии могут быть перенесены на случай интеграла с единственной особенностью в точке a.

Теорема 1. *Пусть задан интеграл* (2) *с единственной особенностью в точке* b. *Для его существования необходимо и достаточно выполнение условия* (*Коши*): *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $b_0 < b$ *такое, что*

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon, \tag{3}$$

каковы бы ни были b', b'', *удовлетворяющие неравенствам* $b_0 < b' < b'' < b$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \quad (a < x < b).$$

Существование интеграла (2) эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$, что в свою очередь эквивалентно выполнению условия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует b_0, где $a < b_0 < b$, так что выполняется неравенство $|F(b'') - F(b')| < \varepsilon$ для всех b' и b'', удовлетворяющих неравенствам $b_0 < b' < b'' < b$. Но

$$F(b'') - F(b') = \int\limits_{b'}^{b''} f(t)\,dt$$

и теорема доказана.

Пример 1. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ — постоянное число, имеет, очевидно, единственную особенность в точке $x = 0$. Чтобы пояснить, сходится ли он, надо вычислить предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\alpha}\left[1-\varepsilon^{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ \infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Таким образом, интеграл (4) сходится при $\alpha < 1$ и равен $(1-\alpha)^{-1}$ и расходится при $\alpha > 1$.

Если же $\alpha = 1$, то он расходится:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon = +\infty.$$

Пример 2. Интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{N\to\infty} x^{1-\alpha}\Bigg|_1^N =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при} \quad \alpha > 1 \text{ (сходится)}, \\ +\infty & \text{при} \quad \alpha < 1 \text{ (расходится)}, \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty}\ln N = +\infty \text{ (расходится)}.$$

Пусть снова задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Тогда интеграл

$$\int_c^b f\,dx, \tag{6}$$

где $a < c < b$, также имеет единственную особенность в точке b. Условие Коши существования интегралов (5) и (6) формулируется, очевидно, совершенно одинаково. Поэтому эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся. Кроме того, при $a < c < b$, очевидно, имеет место

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f\,dx = \lim_{b'\to b}\left(\int_a^c f\,dx + \int_c^{b'} f\,dx\right) =$$
$$= \int_a^c f\,dx + \lim_{b'\to b}\int_c^{b'} f\,dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f\,dx, \quad (7)$$

где $\int_a^c$ — обычный риманов собственный интеграл, а интегралы $\int_a^b$ и $\int_c^b$ — несобственные.

Отметим равенство

$$\int_a^b (Af + B\,\varphi)\,dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} (Af + B\varphi)\,dx =$$
$$= A\lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f\,dx + B\lim_{b'\to b}\int_b^{b'} \varphi\,dx = A\int_a^b f\,dx + B\int_a^b \varphi\,dx, \quad (8)$$

где A и B — постоянные. Его надо понимать в том смысле, что если существуют интегралы в правой части, то существует также интеграл в левой и имеет место равенство (8).

Говорят, что интеграл (5) (имеющий особенность в точке b) *сходится абсолютно*, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty \quad (9)$$

от абсолютного значения $|f(x)|$.

Абсолютно сходящийся интеграл сходится. В самом деле, из сходимости интеграла (9) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ на интервале (a, b) найдется точка b_0 такая, что если $b_0 < b' < b'' < b$, то

$$\varepsilon > \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \geqslant \left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right|,$$

т. е. для интеграла (1) выполняется условие Коши.

Так как

$$\left|\int_a^{b'} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^{b'} |f(x)|\,dx,$$

то после перехода к пределу при $b' \to b$ для абсолютно сходящегося интеграла (5) получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10}$$

Несобственный интеграл может сходиться, но не абсолютно (см. далее примеры §§ 9.14 и 9.15). Конечно, несобственный интеграл от неотрицательной функции, если сходится, то абсолютно.

Отметим еще следующую очевидную теорему:

Теорема 2. *Если F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет непрерывную на $[a, b)$ производную $F'(x)$, то*

$$F(b)-F(a)=\lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}}[F(b')-F(a)]=\lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}}\int_a^{b'}F'(x)\,dx=\int_a^b F'(x)\,dx,$$

где интеграл справа может быть собственным и несобственным.

Например,

$$\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

где особенность интеграла имеет место в левом конце $[0, 1]$.

§ 9.13. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b, и на промежутке $[a, b)$ интегрирования $f(x)\geqslant 0$.

Тогда, очевидно, функция

$$F(b')=\int_a^{b'}f(x)\,dx \qquad (a<b'<b)$$

от b' монотонно не убывает. Поэтому, если она ограничена, $F(b')\leqslant M$ $(a<b'<b)$, существует интеграл (1):

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}f(x)\,dx\leqslant M.$$

Если же F неограничена, то интеграл (1) расходится:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{b'\to b}\int_b^{b'}f(x)\,dx=+\infty.$$