гося интеграла (5) получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10}$$

Несобственный интеграл может сходиться, но не абсолютно (см. далее примеры §§ 9.14 и 9.15). Конечно, несобственный интеграл от неотрицательной функции, если сходится, то абсолютно.

Отметим еще следующую очевидную теорему:

Теорема 2. *Если F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет непрерывную на $[a, b)$ производную $F'(x)$, то*

$$F(b) - F(a) = \lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}} [F(b') - F(a)] = \lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}} \int_a^{b'} F'(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx,$$

где интеграл справа может быть собственным и несобственным.

Например,

$$\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

где особенность интеграла имеет место в левом конце $[0, 1]$.

§ 9.13. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b, и на промежутке $[a, b)$ интегрирования $f(x) \geqslant 0$.

Тогда, очевидно, функция

$$F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,dx \qquad (a < b' < b)$$

от b' монотонно не убывает. Поэтому, если она ограничена, $F(b') \leqslant M$ $(a < b' < b)$, существует интеграл (1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant M.$$

Если же F неограничена, то интеграл (1) расходится:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b} \int_b^{b'} f(x)\,dx = +\infty.$$

Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b)$, то пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \text{или} \quad \int_a^b f\,dx = \infty,$$

в зависимости от того, будет ли интеграл сходиться или расходиться.

Теорема 1. *Пусть интегралы*

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

имеют единственную особенность в точке b и на промежутке $[a, b)$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x). \tag{3}$$

Тогда из сходимости интеграла (2) *следует сходимость интеграла* (1) *и имеет место неравенство*

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx,$$

а из расходимости интеграла (1) *следует расходимость интеграла* (2).

Доказательство. Из (3) следует, что для $a < b' < b$

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b'} \varphi\,dx. \tag{4}$$

Если теперь интеграл (2) сходится, то правая часть (4) ограничена числом, равным интегралу (2), но тогда ограничена и левая. И так как левая часть при возрастании b' монотонно не убывает, то она стремится к пределу (интегралу):

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx.$$

Наоборот, из расходимости интеграла (1) следует, что предел левой части (4) при $b' \to \infty$ равен ∞, а следовательно, и предел правой равен ∞.

Теорема 2. *Пусть интегралы* (1) *и* (2) *имеют единственную особенность в точке b, подынтегральные функции положительны и существует предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0. \tag{5}$$

Тогда эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Из (5) следует, что для положительного $\varepsilon < A$ можно указать такое $c \in [a, b)$, что

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < A + \varepsilon \quad (c < x < b),$$

и так как $\varphi(x) > 0$, то

$$(A - \varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (A + \varepsilon)\varphi(x) \quad (c < x < b). \tag{6}$$

Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi\, dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_c^b \varphi\, dx$ и сходимость интеграла $\int\limits_c^b (A + \varepsilon)\varphi\, dx$. Но тогда по предыдущей теореме сходится также интеграл $\int\limits_c^b f\, dx$, а вместе с ним интеграл $\int\limits_a^b f\, dx$. Наоборот, из сходимости $\int\limits_a^b f\, dx$ следует сходимость $\int\limits_c^b \varphi\, dx$ потому, что наряду с (5) имеет место равенство

$$\lim_{x \to b} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} > 0.$$

Замечание 1. Теорема 2 может быть обобщена следующим образом. Пусть функции f и φ по-прежнему удовлетворяют условиям этой теоремы и ψ — непрерывная и неотрицательная на (a, b) функция. Тогда интегралы $\int\limits_a^b f\psi\, dx$ и $\int\limits_a^b \varphi\psi\, dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся. Чтобы доказать это утверждение, надо рассмотреть вытекающие из (6) неравенства

$$(A - \varepsilon)\varphi(x)\psi(x) \leqslant f(x)\psi(x) \leqslant (A + \varepsilon)\varphi(x)\psi(x).$$

Замечание 2. Если в теореме 2 $A = 0$, то сходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi\, dx$ влечет сходимость интеграла $\int\limits_a^b f\, dx$, что следует из второго неравенства (6), где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Замечание 3. В теореме 2 можно заранее считать, что только одна из функций f или φ положительна на $[a, b)$, потому что из (6) тогда следует, что и вторая положительна на $[c, b)$ при некотором c.

Примеры. Значок $\sim$ между двумя интегралами обозначает, что эти интегралы в силу теоремы 2 одновременно сходятся или одновременно расходятся.

$$1)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln(1+\sqrt{x})} \sim \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} \sim \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty, \quad x \to 0.$$

$$2)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\ln(1+x)} \sim \int\limits_0^1 \frac{dx}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \sim \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \infty, \quad x \to 0.$$

Интегралы 1), 2) имеют единственную особенность в точке $x = 0$ (это отмечено выше символом $x \to 0$). В знаменателях под этими интегралами мы выделили главные степенные члены (см. §§ 4.10 и 5.11) и применили теорему 2. Интеграл 1) сходится, а интеграл 2) расходится.

$$3)\ \int\limits_1^\infty x^\alpha e^{-x^\beta}\,dx = \int\limits_1^\infty \left(x^{\alpha+2}e^{-x^\beta}\right)\frac{1}{x^2}\,dx \leqslant K\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty, \quad \beta > 0.$$

Функция в скобках непрерывна на $[1, \infty]$ и стремится к нулю при $x \to \infty$, поэтому она ограничена на $[1, \infty)$ некоторой константой K. Таким образом, этот интеграл, имеющий единственную особенность в $x = \infty$, сходится.

§ 9.14. Интегрирование по частям

Пусть на луче $[a, \infty)$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а ψ к тому же имеет непрерывную производную. Тогда, если обозначить через $\Phi(x)$ какую-либо первообразную от $\varphi(x)$, получим

$$\int\limits_a^N \varphi(x)\psi(x)\,dx =$$
$$= \psi(N)\Phi(N) - \psi(a)\Phi(a) - \int\limits_a^N \psi'(x)\Phi(x)\,dx, \quad a < N < \infty. \tag{1}$$

Если существует несобственный интеграл

$$\int\limits_a^\infty \psi'(x)\Phi(x)\,dx = A \tag{2}$$

и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x)\Phi(x) = B, \tag{3}$$

то существует несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = B - \psi(a)\Phi(a) - A. \tag{4}$$