Примеры. Значок $\sim$ между двумя интегралами обозначает, что эти интегралы в силу теоремы 2 одновременно сходятся или одновременно расходятся.

$$1)\ \int_0^1 \frac{dx}{\ln(1+\sqrt{x})} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty, \quad x \to 0.$$

$$2)\ \int_0^1 \frac{dx}{x-\ln(1+x)} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \infty, \quad x \to 0.$$

Интегралы 1), 2) имеют единственную особенность в точке $x = 0$ (это отмечено выше символом $x \to 0$). В знаменателях под этими интегралами мы выделили главные степенные члены (см. §§ 4.10 и 5.11) и применили теорему 2. Интеграл 1) сходится, а интеграл 2) расходится.

$$3)\ \int_1^\infty x^\alpha e^{-x^\beta}\,dx = \int_1^\infty \left(x^{\alpha+2}e^{-x^\beta}\right)\frac{1}{x^2}\,dx \leqslant K\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty, \quad \beta > 0.$$

Функция в скобках непрерывна на $[1, \infty]$ и стремится к нулю при $x \to \infty$, поэтому она ограничена на $[1, \infty)$ некоторой константой K. Таким образом, этот интеграл, имеющий единственную особенность в $x = \infty$, сходится.

§ 9.14. Интегрирование по частям

Пусть на луче $[a, \infty)$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а ψ к тому же имеет непрерывную производную. Тогда, если обозначить через $\Phi(x)$ какую-либо первообразную от $\varphi(x)$, получим

$$\int_a^N \varphi(x)\psi(x)\,dx =$$
$$= \psi(N)\Phi(N) - \psi(a)\Phi(a) - \int_a^N \psi'(x)\Phi(x)\,dx, \qquad a < N < \infty. \tag{1}$$

Если существует несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \psi'(x)\Phi(x)\,dx = A \tag{2}$$

и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x)\Phi(x) = B, \tag{3}$$

то существует несобственный интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = B - \psi(a)\Phi(a) - A. \tag{4}$$

Отметим некоторые частные достаточные признаки существования интеграла (2) и предела (3), а следовательно, и существования интеграла (4).

1) Если функция

$$|\Phi(x)| \leqslant M \tag{5}$$

ограничена,

$$\psi(x) \to 0 \quad (x \to \infty) \tag{6}$$

и

$$\int_a^\infty |\psi'(x)|\, dx < \infty, \tag{7}$$

то интеграл (2) и предел (3) существуют.

Действительно, тогда интеграл (2) сходится, даже абсолютно:

$$\int_a^\infty |\psi'(x)\,\Phi(x)|\, dx \leqslant M \int_a^\infty |\psi'(x)|\, dx < \infty,$$

и

$$|\psi(x)\Phi(x)| \leqslant M|\psi(x)| \to 0 \quad (x \to \infty).$$

Таким образом, в данном случае интеграл (4) сходится и $B = 0$.

2) *Признак Дирихле.* Этот признак заключается в том, что для функции Φ выполняется неравенство (5), что же касается функции ψ, то она предполагается убывающей на $[a, \infty)$ и стремящейся к нулю при $x \to \infty$, и, таким образом, имеющей неположительную производную. Тогда условие (6) выполняется. Выполняется также и признак (7) потому, что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^N |\psi'(x)|\, dx = -\lim_{N\to\infty} \int_a^N \psi'(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} [\psi(a) - \psi(N)] = \psi(a).$$

Таким образом, признак Дирихле есть частный случай признака 1).

Пример. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{8}$$

имеет единственную особенность (в «точке» ∞). Надо иметь в виду, что функция $(\sin x)/x$ имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$. Если ее положить равной 1 в этой точке, то она станет непрерывной. Интеграл (8) сходится потому, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

сходится на основании признака Дирихле (функция $1/x$ монотонно убывает, стремится при $x \to \infty$ к нулю и имеет непрерывную производную, а функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $(-\cos x)$). Однако интеграл (8) сходится не абсолютно (см. § 9.15, пример 1).

§ 9.15. Несобственный интеграл и ряд *)

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Пусть

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b, \quad b_k \to b.$$

Тогда можно определить ряд

$$\int_{b_0}^{b_1} f\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f\,dx + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx, \tag{2}$$

k-й член которого равен

$$u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx.$$

Теорема 1. *Если интеграл* (1) *сходится, то сходится также ряд* (2) *и имеет место равенство*

$$\int_a^b f\,dx = \sum_0^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx. \tag{3}$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{b_0}^{b_{n+1}} f\,dx = \int_a^b f\,dx,$$

Если f неотрицательна на $[a, \infty)$, то и наоборот, из сходимости ряда (2) следует сходимость интеграла (1). В самом деле, пусть ряд сходится и имеет сумму, равную S. Для любого b', где $a < b' < b$, можно указать такое n_0, что $b_n > b'$ для $n > n_0$. Поэтому, учитывая, что $f(x) \geqslant 0$,

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b_n} f\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx \leqslant S,$$

*) Для понимания этого параграфа требуются самые элементарные понятия о ряде в пределах § 11.1.