сходится на основании признака Дирихле (функция $1/x$ монотонно убывает, стремится при $x \to \infty$ к нулю и имеет непрерывную производную, а функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $(-\cos x)$). Однако интеграл (8) сходится не абсолютно (см. § 9.15, пример 1).

§ 9.15. Несобственный интеграл и ряд *)

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Пусть

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b, \quad b_k \to b.$$

Тогда можно определить ряд

$$\int_{b_0}^{b_1} f\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f\,dx + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx, \tag{2}$$

k-й член которого равен

$$u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx.$$

Теорема 1. *Если интеграл* (1) *сходится, то сходится также ряд* (2) *и имеет место равенство*

$$\int_a^b f\,dx = \sum_0^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx. \tag{3}$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{b_0}^{b_{n+1}} f\,dx = \int_a^b f\,dx,$$

Если f неотрицательна на $[a, \infty)$, то и наоборот, из сходимости ряда (2) следует сходимость интеграла (1). В самом деле, пусть ряд сходится и имеет сумму, равную S. Для любого b', где $a < b' < b$, можно указать такое n_0, что $b_n > b'$ для $n > n_0$. Поэтому, учитывая, что $f(x) \geqslant 0$,

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b_n} f\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx \leqslant S,$$

*) Для понимания этого параграфа требуются самые элементарные понятия о ряде в пределах § 11.1.

т. е. интеграл в левой части ограничен и, следовательно, несобственный интеграл (1) существует. Но тогда, как доказано выше, справедливо равенство (3).

Если же функция f не сохраняет знак на $[a, b)$, то из сходимости ряда (2) вообще не следует сходимость интеграла. Например, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x\,dx = \sum_{0}^{\infty} 0 = 0$$

сходится, интеграл же $\int_0^{\infty} \sin t\,dt$ расходится потому, что функция от x

$$\int_0^x \sin t\,dt = 1 - \cos x$$

не стремится к пределу при $x \to \infty$.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна и не возрастает на $[0, \infty)$, то интеграл*

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots$$

одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Имеют место неравенства

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k), \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Суммируя их по k, получим

$$\sum_{1}^{n+1} f(k) = \sum_{0}^{n} f(k+1) \leqslant \int_0^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{0}^{n} f(k). \tag{4}$$

Отсюда, учитывая, что все члены в этих соотношениях при возрастании n монотонно не убывают, следует утверждение теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots \tag{5}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ потому, что функция

$1/(1+x)^\alpha$ при $\alpha>0$ непрерывна и монотонно убывает на $[0, \infty)$, а

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^\alpha} \begin{cases} <\infty & (\alpha>1), \\ =\infty & (\alpha\leqslant 1). \end{cases}$$

В случае $\alpha\leqslant 0$ непосредственно видно, что ряд (5) расходится.

Теорема 3. *Пусть в интеграле*

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx \tag{6}$$

функции $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *непрерывны,* $\psi(x)>0$ *и возрастает (не убывает),* $\varphi(x)$ *неотрицательна и периода* l *и* $\int_0^l \varphi(x)\,dx>0$. *Тогда интеграл*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\psi(x)} \tag{7}$$

и интеграл (6) *одновременно сходятся или одновременно расходятся.*

Доказательство. Представим интеграл (6) формально в виде ряда

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx=\sum_{k=0}^\infty \lambda_k, \quad \lambda_k=\int_{kl}^{(k+1)l} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx. \tag{8}$$

В силу периодичности φ

$$\int_{kl}^{(k+1)l} \varphi(x)\,dx=\int_0^l \varphi(kl+u)\,du=\int_0^l \varphi(u)\,du=\mu>0,$$

и так как ψ возрастает, то, очевидно,

$$\frac{\mu}{\psi((k+1)l)}\leqslant\lambda_k\leqslant\frac{\mu}{\psi(kl)} \quad (k=0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Интеграл слева в (8) одновременно сходится с рядом справа в (8), который в силу (9) сходится одновременно с рядом $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\psi(kl)}$, который, наконец, по предыдущей теореме сходится одновременно с интегралом (7), и теорема доказана.

Пример 1.

$$\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx=\infty$$

по теореме 3, где надо считать $l=\pi$, $\varphi(x)=|\sin x|$, $\psi(x)=x$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx \qquad (\alpha > 0). \tag{10}$$

Он имеет единственную особенность в точке ∞. При $\alpha > 1$ он абсолютно сходится:

$$\int_2^\infty \frac{|\sin x|}{|x^\alpha + \sin x|}\,dx \leqslant \int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha - 1} < \infty,$$

потому что $x^\alpha \sim x^\alpha - 1$ $(x \to \infty)$, а $\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \infty$.

При $\alpha \leqslant 1$ интеграл (10) абсолютно не сходится потому, что

$$\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{|x^\alpha + \sin x|}\,dx \geqslant \int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha + 1}\,dx = \infty$$

в силу последней теоремы. Ведь функция $|\sin x|$ непрерывна, периода π и $\int_0^\pi |\sin x|\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2 > 0$, функция же $x^\alpha + 1$ непрерывно возрастает и $\int_\pi^\infty (x^\alpha + 1)^{-1}\,dx = \infty$.

Но интеграл (10) все же для $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ сходится (не абсолютно). Действительно, применяя интегрирование по частям, получим

$$\int_1^N \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx = -\cos x\,\frac{1}{x^\alpha + \sin x}\Bigg|_1^N - \int_1^N \frac{\cos x\,(\alpha x^{\alpha-1} + \cos x)}{(x^\alpha + \sin x)^2}\,dx.$$

Первый член правой части при $\alpha > 0$ имеет при $N \to \infty$ конечный предел, второй член есть сумма интегралов

$$I'_N = -\int_1^N \frac{\cos^2 x}{(x^\alpha + \sin x)^2}\,dx, \quad I''_N = -\alpha \int_1^N \frac{\cos x \cdot x^{\alpha-1}}{(x^\alpha + \sin x)^2}\,dx.$$

Но

$$\int_2^\infty \frac{|\cos x|\,x^{\alpha-1}}{(x^\alpha + \sin x)^2}\,dx \leqslant \int_2^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x^\alpha - 1)^2}\,dx < C \int_2^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < \infty,$$

поэтому I''_N стремится к конечному пределу при $N \to \infty$ для любого $\alpha > 0$, и вопрос свелся к исследованию I'_N.

Интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^\alpha + \sin x)^2}\, dx$ при $\alpha > 0$ сходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^{2\alpha}}\, dx \tag{11}$$

(см. замечание 1 в конце § 9.13) в силу того, что $x^\alpha + \sin x \sim x^\alpha (x \to \infty)$. А интеграл (11) одновременно сходится с интегралом

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}} \begin{cases} < \infty & (1/2 < \alpha), \\ = +\infty & (1/2 \geqslant \alpha) \end{cases}$$

(см. предыдущую теорему).

Итак, предел I'_N при $N \to \infty$ существует только при $\alpha > 1/2$, поэтому и интеграл (10) сходится только при $\alpha > 1/2$.

§ 9.16. Несобственные интегралы с особенностями в нескольких точках

Пусть (a, b) есть интервал, конечный или бесконечный, и на нем задана функция f такая, что интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx \tag{1}$$

имеет особенности только в точках a и b. Это значит, что $a = -\infty$ или, если a — конечная точка, то в ее окрестности функция f неограничена; также $b = +\infty$ или, если b — конечная точка, то в окрестности ее f неограничена. Кроме того, функция f интегрируема на любом отрезке $[a', b']$, где $a < a' < b' < b$.

Произвольная точка c интервала (a, b) делит его на два частичных интервала (a, c), (c, b).

Интеграл

$$\int\limits_{a}^{c} f(x)\, dx \tag{2}$$

имеет единственную особенность (в точке a); интеграл

$$\int\limits_{c}^{b} f(x)\, dx \tag{3}$$

также имеет единственную особенность (в точке b). Для интегралов (2) и (3) мы уже знаем, в каком случае они существуют (сходятся) как несобственные интегралы.