Интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^\alpha + \sin x)^2}\, dx$ при $\alpha > 0$ сходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^{2\alpha}}\, dx \tag{11}$$

(см. замечание 1 в конце § 9.13) в силу того, что $x^\alpha + \sin x \sim x^\alpha (x \to \infty)$. А интеграл (11) одновременно сходится с интегралом

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}} \begin{cases} < \infty & (1/2 < \alpha), \\ = +\infty & (1/2 \geqslant \alpha) \end{cases}$$

(см. предыдущую теорему).

Итак, предел I'_N при $N \to \infty$ существует только при $\alpha > 1/2$, поэтому и интеграл (10) сходится только при $\alpha > 1/2$.

§ 9.16. Несобственные интегралы с особенностями в нескольких точках

Пусть (a, b) есть интервал, конечный или бесконечный, и на нем задана функция f такая, что интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \tag{1}$$

имеет особенности только в точках a и b. Это значит, что $a = -\infty$ или, если a — конечная точка, то в ее окрестности функция f неограничена; также $b = +\infty$ или, если b — конечная точка, то в окрестности ее f неограничена. Кроме того, функция f интегрируема на любом отрезке $[a', b']$, где $a < a' < b' < b$.

Произвольная точка c интервала (a, b) делит его на два частичных интервала (a, c), (c, b).

Интеграл

$$\int\limits_a^c f(x)\, dx \tag{2}$$

имеет единственную особенность (в точке a); интеграл

$$\int\limits_c^b f(x)\, dx \tag{3}$$

также имеет единственную особенность (в точке b). Для интегралов (2) и (3) мы уже знаем, в каком случае они существуют (сходятся) как несобственные интегралы.

По определению, несобственный интеграл (1) существует (сходится) в том и только в том случае, если каждый из интегралов (2) и (3) существует. При этом полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Это определение не зависит от c. В самом деле, если $a < c < c' < b$, то

$$\int_c^b = \int_c^{c'} + \int_{c'}^b, \tag{4}$$

где интеграл $\int_c^{c'}$ — собственный, и, аналогично,

$$\int_a^c + \int_c^{c'} = \int_a^{c'}. \tag{5}$$

Сложив (4) и (5) и сократив на $\int_c^{c'}$, получим

$$\int_a^c + \int_c^b = \int_a^{c'} + \int_{c'}^b.$$

Но может быть более сложный случай. Пусть задан, пока формально, интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

где интервал (a, b) может быть конечным и бесконечным. Пусть, далее, интервал (a, b) можно разбить точками $a = c_0 < c_1 < c_2 \ldots \ldots < c_{n-1} < c_n = b$ на конечное число частичных интервалов (c_k, c_{k+1}) таких, что каждый из интегралов

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{7}$$

имеет только одну особенность на одном из концов (c_k, c_{k+1}).

Тогда, если все несобственные интегралы (7) существуют (сходятся), то, по определению, считают существующим (сходящимся) и интеграл (6). При этом полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f\,dx.$$

Если хотя бы один из интегралов (7) не сходится, то и интеграл (6) считается расходящимся (не существующим).

Аналогично, интеграл (6) называется абсолютно сходящимся тогда и только тогда, если все интегралы (7) абсолютно сходятся.

Мы хотим еще сделать одно замечание. Допустим для примера, что точка a конечна, $a < b < \infty$, и интеграл

$$\int_a^\infty f\,dx \tag{8}$$

имеет, кроме точки ∞, еще только одну особенность в точке b.

Пусть $b < c < \infty$. Тогда, как было определено выше, несобственный интеграл (8), который мы будем считать существующим, можно определить следующим образом ($\varepsilon_j > 0$):

$$\int_a^\infty f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx + \int_c^\infty f\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{b-\varepsilon_1} f\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{b+\varepsilon_2}^{c} f\,dx + \lim_{\varepsilon_3 \to 0} \int_c^{1/\varepsilon_3} f\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0} \left\{ \int_a^{b-\varepsilon_1} f\,dx + \int_{b+\varepsilon_2}^{c} f\,dx + \int_c^{1/\varepsilon_3} f\,dx \right\} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0), \tag{9}$$

т. е. если существует несобственный интеграл (8), то существует также предел выражения в фигурных скобках, когда положительные ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю независимо друг от друга *). Важно отметить, что обратное утверждение также верно, т. е. если существует предел правой части (9), когда положительные ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю независимо друг от друга, то существуют каждый из трех пределов, стоящих в третьем члене (9), т. е. существует несобственный интеграл (8). Чтобы доказать это, введем обозначение

$$\varphi_1(\varepsilon_1) = \int_a^{b-\varepsilon_1} f\,dx, \quad \varphi_2(\varepsilon_2) = \int_{b+\varepsilon_2}^{c} f\,dx, \quad \varphi_3(\varepsilon_3) = \int_c^{1/\varepsilon_3} f\,dx.$$

Пусть известно, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0} \{\varphi_1(\varepsilon_1) + \varphi_2(\varepsilon_2) + \varphi_3(\varepsilon_3)\};$$

тогда выполняется условие Коши: для всякого $\eta > 0$ должно найтись такое $\delta > 0$, что если $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3' < \delta$, то

$$|\varphi_1(\varepsilon_1) + \varphi_2(\varepsilon_2) + \varphi_3(\varepsilon_3) - \varphi_1(\varepsilon_1') - \varphi_2(\varepsilon_2') - \varphi_3(\varepsilon_3')| < \eta.$$

*) Здесь идет речь о пределе функции от трех переменных в нулевой точке на множестве точек с положительными координатами.

Но мы имеем право взять $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_3'$, и тогда получится, что для всякого $\eta > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|\varphi_1(\varepsilon_1) - \varphi_1(\varepsilon_1')| < \eta$ для $0 < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1' < \delta$, а это показывает, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \varphi_1(\varepsilon_1). \tag{10}$$

Подобным образом доказывается существование остальных двух пределов:

$$\lim_{\varepsilon_2 \to 0} \varphi_2(\varepsilon_2), \quad \lim_{\varepsilon_3 \to 0} \varphi_3(\varepsilon_3). \tag{11}$$

Таким образом, доказано, что для существования интеграла (8) необходимо и достаточно существование предела в правой части (9), когда положительные ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю независимо друг от друга.

В этом утверждении существенно, что переменные ε_1, ε_2, ε_3 независимы. Если бы, например, было известно, что существует предел правой части только при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \to 0$, то этого было бы недостаточно, чтобы заключить существование каждого из пределов (10), (11) порознь.

Приведенные рассуждения распространяются понятным образом и на другие случаи расположения особенностей интеграла.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}. \tag{12}$$

Он имеет единственную особенность в точке 0. Он не существует, потому что не существуют отдельно интегралы $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ и $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$.

На основании сказанного выше можно еще сказать, что интеграл (12) не существует потому, что не существует предел

$$\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon_2}^{1} = \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

когда ε_1 и ε_2 стремятся к нулю независимо друг от друга.

Итак, несобственный интеграл по Риману от функции $1/x$ на отрезке $[-1, 1]$ не существует.

Однако существует одно важное обобщение несобственного интеграла (*в смысле главного значения — по Коши*), в силу которого указанный интеграл понимается как предел

$$P.\ V. \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right\} = 0$$

(т. е. здесь $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$!). Здесь $P.\ V.$ — сокращенная запись выражения Principal Value (англ.) — главное значение (см. § 16.7, (5)).

§ 9.17. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Пусть функция f имеет на некотором интервале, содержащем в себе точку a, непрерывную кусочногладкую производную порядка $r-1$ включительно. Тогда на указанном интервале существует, за исключением конечного числа точек, производная $f^{(r)}(x)$, представляющая собой кусочнонепрерывную функцию (см. § 5.15). Для любого значения x из этого интервала имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R(x), \tag{1}$$

$$R(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{0}^{x} (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt \qquad (0! = 1). \tag{2}$$

Действительно, последовательное интегрирование $R(x)$ по частям дает

$$R(x) = -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1} + \frac{1}{(r-2)!}\int_{a}^{x} (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t)\, dt =$$

$$= -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1} - \frac{f^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}(x-a)^{r-2} +$$

$$+ \frac{1}{(r-3)!}\int_{a}^{x} (x-t)^{r-3} f^{(r-2)}(t)\, dt = \ldots = -\sum_{0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f(x).$$

Если в интеграле (2) сделать подстановку $t = a + (x-a)u$, $dt = (x-a)du$, то получим следующее выражение для остаточного члена:

$$R(x) = (x-a)^r \psi(x),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{0}^{1} (1-u)^{r-1} f^{(r)}(a + (x-a)u)\, du. \tag{3}$$