которого указанный интеграл понимается как предел

$$P.\,V.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right\}=0$$

(т. е. здесь $\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2$!). Здесь $P.\ V.$ — сокращенная запись выражения Principal Value (англ.) — главное значение (см. § 16.7, (5)).

§ 9.17. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Пусть функция f имеет на некотором интервале, содержащем в себе точку a, непрерывную кусочногладкую производную порядка $r-1$ включительно. Тогда на указанном интервале существует, за исключением конечного числа точек, производная $f^{(r)}(x)$, представляющая собой кусочнонепрерывную функцию (см. § 5.15). Для любого значения x из этого интервала имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R(x),\tag{1}$$

$$R(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{0}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)\,dt\qquad(0!=1).\tag{2}$$

Действительно, последовательное интегрирование $R(x)$ по частям дает

$$R(x)=-\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1}+\frac{1}{(r-2)!}\int_{a}^{x}(x-t)^{r-2}f^{(r-1)}(t)\,dt=$$

$$=-\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1}-\frac{f^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}(x-a)^{r-2}+$$

$$+\frac{1}{(r-3)!}\int_{a}^{x}(x-t)^{r-3}f^{(r-2)}(t)\,dt=\ldots=-\sum_{0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+f(x).$$

Если в интеграле (2) сделать подстановку $t=a+(x-a)u$, $dt=(x-a)du$, то получим следующее выражение для остаточного члена:

$$R(x)=(x-a)^r\,\psi(x),$$

$$\psi(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{0}^{1}(1-u)^{r-1}f^{(r)}(a+(x-a)u)\,du.\tag{3}$$

Здесь, если $f^{(r)}(x)$ непрерывна, то и $\psi(x)$ — непрерывная функция от x, потому что к интегралу (3) применима теорема о непрерывности его по параметру x (см. § 12.13). Если же функция f имеет непрерывные производные более высокого порядка $f^{(r+s)}(s>0)$, то $\psi(x)$ законно дифференцировать s раз под знаком интеграла (см. § 13.12). Поэтому в этом случае $\psi(x)$ будет s раз непрерывно дифференцируема. Этот факт мы не могли бы получить, рассматривая остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, содержащей в себе функцию θ, дифференциальные свойства которой *a priori* неизвестны.

§ 9.18. Формулы Валлиса и Стирлинга *)

Формула Валлиса имеет вид

$$\sqrt{\pi}=\lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2\,2^{2m}}{(2m)!\,\sqrt{m}}. \tag{1}$$

Чтобы вывести ее, проинтегрируем по частям интеграл:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=-\sin^{n-1}x\cos x\,\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx.$$

Перенося второй интеграл правой части этого равенства в левую и деля на n, получим

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx. \tag{2}$$

Отправляясь от четного и нечетного n и последовательно применяя это равенство, понижающего степень $\sin x$ на две единицы, получим

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m}x\,dx=\frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dx=\frac{(2m-1)!!}{2m!!}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}x\,dx=\frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

---

*) Д. Валлис (1616—1703) — английский математик; Д. Стирлинг (1692—1770) — шотландский математик.