Здесь, если $f^{(r)}(x)$ непрерывна, то и $\psi(x)$ — непрерывная функция от x, потому что к интегралу (3) применима теорема о непрерывности его по параметру x (см. § 12.13). Если же функция f имеет непрерывные производные более высокого порядка $f^{(r+s)}(s>0)$, то $\psi(x)$ законно дифференцировать s раз под знаком интеграла (см. § 13.12). Поэтому в этом случае $\psi(x)$ будет s раз непрерывно дифференцируема. Этот факт мы не могли бы получить, рассматривая остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, содержащей в себе функцию θ, дифференциальные свойства которой *a priori* неизвестны.

§ 9.18. Формулы Валлиса и Стирлинга *)

Формула Валлиса имеет вид

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2\, 2^{2m}}{(2m)!\,\sqrt{m}}. \tag{1}$$

Чтобы вывести ее, проинтегрируем по частям интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

Перенося второй интеграл правой части этого равенства в левую и деля на n, получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx. \tag{2}$$

Отправляясь от четного и нечетного n и последовательно применяя это равенство, понижающего степень $\sin x$ на две единицы, получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

*) Д. Валлис (1616—1703) — английский математик; Д. Стирлинг (1692—1770) — шотландский математик.

Разделив теперь эти равенства одно на другое и положив

$$\mu_m = \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\, dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

приходим к равенству

$$\pi = 2\frac{[(2m)!!]^2}{(2m-1)!!(2m+1)!!}\mu_m. \tag{3}$$

Заметим, что на отрезке $[0, \pi/2]$

$$\sin^{2m+1} x \leqslant \sin^{2m} x \leqslant \sin^{2m-1} x,$$

откуда

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x\, dx.$$

Деля члены этой цепи на $\int\limits_0^{\pi} \sin^{2m+1} x\, dx$ и применяя равенство (2), получим

$$1 \leqslant \mu_m \leqslant \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x\, dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx} = \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m},$$

откуда следует, что

$$\mu_m \to 1 \qquad (m \to \infty). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует асимптотическое равенство

$$\pi \approx 2\frac{[(2m)!!]^2}{(2m-1)!!\,(2m+1)!!} \approx 2\left(\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\right)^2 2m \quad (m \to \infty),$$

где мы последовательно пренебрегли множителями μ_m, $\frac{2m}{2m+1} \to 1$, откуда

$$\sqrt{\pi} \approx 2\sqrt{m}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} = 2\sqrt{m}\frac{[(2m-2)!!]^2}{(2m-1)!} =$$
$$= 2\sqrt{m}\frac{[(2m)!!]^2}{(2m)!}\cdot\frac{1}{2m} = \frac{(m!)^2\, 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}} \quad (m \to \infty),$$

т. е. имеет место (1)

Формула Стирлинга представляет собой равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}} = 1 \tag{5}$$

или, что все равно, асимптотическое равенство

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \qquad (n \to \infty). \tag{6}$$

Покажем неравенства

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+(1/2)} e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}\, n^{n+(1/2)} e^{-n+(1/4n)}, \tag{7}$$

из которых непосредственно следует (5) или (6).

Положим

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+(1/2)}, \quad \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Функция $1/x$ монотонно убывает и выпукла книзу при $x > 0$, поэтому площадь фигуры, ограниченной ее графиком, осью x и прямыми $x = n$, $x = n + 1$, меньше площади трапеции $nBC(n+1)$, но больше площади трапеции $nB'C'(n+1)$, где $B'C'$ — отрезок касательной к нашей кривой в точке ее, имеющей абсциссу $x = n + (1/2)$ (рис. 9.2):

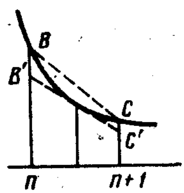

Рис. 9.2.

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Умножая члены этой цепи на $n + (1/2)$ и вычитая затем из всех членов 1, получим

$$0 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)} - 1 = \frac{1}{4n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

т. е. $0 < \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ или

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}. \tag{9}$$

Подставляя теперь в эти неравенства $n + j$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$

вместо n и перемножая их, получим

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+k}\right)}. \tag{10}$$

Первое неравенство (9) показывает, что последовательность положительных чисел a_j $(j = 1, 2, \ldots)$ монотонно убывает и, следовательно, стремится к неотрицательному пределу, который обозначим через α. Из неравенств (10) после перехода в них к пределу при $k \to \infty$, получим

$$1 < \frac{a_n}{\alpha} \leqslant e^{1/4n} \tag{11}$$

откуда видно, что $\alpha > 0$.

Формула Валлиса на языке чисел a_n, очевидно, записывается так

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

и, следовательно,

$$\alpha = \sqrt{2\pi}. \tag{12}$$

Из (8), (11) и (12) следуют неравенства (7).