По определению, *определенным интегралом* (*Римана*) *от* f *на* $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx = I, \qquad (1)$$

понимаемый в том смысле, что I есть такое число, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех разбиений R, у которых $\Delta x_i < \delta$, имеет место $|S_R - I| < \varepsilon$, независимо от выбора точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Другое эквивалентное определение предела (1) следующее: какова бы ни была последовательность разбиений $R^k = \{a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = b\}$ такая, что $\max \Delta x_i^k \to 0$, $k \to \infty$, при любом выборе для каждого k произвольных, но определенных точек $\xi_i^k \in [x_i^k, x_{i+1}^k]$, соответствующая интегральная сумма имеет предел

$$\lim_{k\to\infty} S_{R_k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(\xi_i^k)\,\Delta x_i^k = I$$

(не зависящий от выбора указанных R^k и ξ_i^k).

Эквивалентность этих двух пониманий предела (1) доказывается аналогично тому, как устанавливается эквивалентность пониманий предела функции на языке ε, δ и на языке последовательностей.

Факт существования интеграла можно еще выразить на языке критерия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для разбиений R и R' с частичными отрезками длины, не большей δ, имеет место $|S_R - S_{R'}| < \varepsilon$.

§ 9.2. Ограниченность интегрирующей функции

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.*

В самом деле, пусть f неограничена на $[a, b]$, и $S_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j$ — ее интегральная сумма, соответствующая произвольному разбиению R. Так как f неограничена на $[a, b]$, то она неограничена по крайней мере на одном из отрезков $[x_j; x_{j+1}]$ разбиения, пусть на $[x_{j_0}; x_{j_0+1}]$. Имеем

$$S_R = f(\xi_{j_0})\,\Delta x_{j_0} + \sum{}' f(\xi_j)\,\Delta x_j = f(\xi_{j_0})\,\Delta x_{j_0} + A,$$

где сумма Σ' распространена на все $j \neq j_0$. Мы считаем, что все входящие в нее ξ_j произвольны, но фиксированы. Отсюда $|S_R| \geqslant |f(\xi_{j_0})|\Delta x_{j_0} - |A|$. Зададим как угодно большее число N и составим неравенство

$$|f(\xi_{j_0})|\,\Delta x_{j_0}-|A|>N,\quad |f(\xi_{j_0})|>\frac{|A|+N}{\Delta x_{j_0}}.$$

В силу неограниченности f на $[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$ имеется такая точка $\xi_{j_0}\in[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$, для которой оно выполняется.

Мы получили, что если f неограничена на $[a, b]$, то каковы бы ни были число $N>0$ и разбиение R, соответствующая R интегральная сумма может быть сделана путем надлежащего выбора точек ξ_j, большей по абсолютной величине, чем N. Следовательно, f не интегрируема на $[a, b]$.

В дальнейшем будут рассматриваться только ограниченные функции.

§ 9.3. Суммы Дарбу *)

Пусть на $[a, b]$ задана ограниченная функция f и пусть $R=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ — произвольное разбиение $[a, b]$. Положим $m_j=\inf\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)$, $M_j=\sup\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)$. По определению числа

$$\underline{S}_R=\sum_{j=0}^{n-1} m_j\Delta x_j,\quad \overline{S}_R=\sum_{j=0}^{n-1} M_j\Delta x_j$$

называются соответственно нижней и верхней интегральными *суммами Дарбу* f, соответствующими разбиению R. Это вполне определенные числа, зависящие от f и R.

Очевидно, что $\underline{S}_R\leqslant\overline{S}_R$.

Пусть R_1, R_2, R_3 — разбиения $[a, b]$. Если все точки R_1 принадлежат R_2, то будем писать $R_1\subset R_2$ и говорить, что R_2 есть продолжение R_1. Если множество точек, из которых состоит R_3, есть теоретико-множественная сумма множеств точек, из которых состоят R_1 и R_2, то будем писать $R_3=R_1+R_2$.

Если $R\subset R'$, то

$$\underline{S}_R\leqslant\underline{S}_{R'}\leqslant\overline{S}_{R'}\leqslant\overline{S}_R. \tag{1}$$

Действительно, будем считать, что

$$R=\{x_0<x_1<\ldots<x_n\},$$

$$R'=\{x_0=x_{0,0}<x_{0,1}<\ldots<x_{0,l_0}=x_1=x_{1,0}<x_{1,1}<\ldots$$
$$\ldots<x_{n-2,l_{n-2}}=x_{n-1}=x_{n-1,0}<\ldots<x_{n-1,l_{n-1}}=x_n\}.$$

Тогда, очевидно, $M_{jk}=\sup\limits_{x\in[x_{j,k},x_{j,k+1}]} f\leqslant\sup\limits_{x\in[x_j,\,x_{j+1}]} f\leqslant M_j$ и

$$\overline{S}_{R'}=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{l_j-1} M_{jk}\Delta x_{jk}\leqslant\sum_{j=0}^{n-1} M_j\sum_{k=0}^{l_j-1}\Delta x_{jk}=\sum_{j=0}^{n-1} M_j\Delta x_j=\overline{S}_R,$$

*) Г. Дарбу (1842—1917) — французский математик.