составим неравенство

$$|f(\xi_{j_0})|\,\Delta x_{j_0} - |A| > N, \quad |f(\xi_{j_0})| > \frac{|A|+N}{\Delta x_{j_0}}.$$

В силу неограниченности $f$ на $[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$ имеется такая точка $\xi_{j_0} \in [x_{j_0}, x_{j_0+1}]$, для которой оно выполняется.

Мы получили, что если $f$ неограничена на $[a, b]$, то каковы бы ни были число $N > 0$ и разбиение $R$, соответствующая $R$ интегральная сумма может быть сделана путем надлежащего выбора точек $\xi_j$, большей по абсолютной величине, чем $N$. Следовательно, $f$ не интегрируема на $[a, b]$.

В дальнейшем будут рассматриваться только ограниченные функции.

## § 9.3. Суммы Дарбу *)

Пусть на $[a, b]$ задана ограниченная функция $f$ и пусть $R = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — произвольное разбиение $[a, b]$. Положим $m_j = \inf\limits_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$, $M_j = \sup\limits_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$. По определению числа

$$\underline{S}_R = \sum_{j=0}^{n-1} m_j \Delta x_j, \quad \overline{S}_R = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \Delta x_j$$

называются соответственно нижней и верхней интегральными *суммами Дарбу* $f$, соответствующими разбиению $R$. Это вполне определенные числа, зависящие от $f$ и $R$.

Очевидно, что $\underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R$.

Пусть $R_1$, $R_2$, $R_3$ — разбиения $[a, b]$. Если все точки $R_1$ принадлежат $R_2$, то будем писать $R_1 \subset R_2$ и говорить, что $R_2$ есть продолжение $R_1$. Если множество точек, из которых состоит $R_3$, есть теоретико-множественная сумма множеств точек, из которых состоят $R_1$ и $R_2$, то будем писать $R_3 = R_1 + R_2$.

Если $R \subset R'$, то

$$\underline{S}_R \leqslant \underline{S}_{R'} \leqslant \overline{S}_{R'} \leqslant \overline{S}_R. \tag{1}$$

Действительно, будем считать, что

$$R = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\},$$

$$R' = \{x_0 = x_{0,0} < x_{0,1} < \ldots < x_{0,l_0} = x_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < \ldots$$
$$\ldots < x_{n-2,l_{n-2}} = x_{n-1} = x_{n-1,0} < \ldots < x_{n-1,l_{n-1}} = x_n\}.$$

Тогда, очевидно, $M_{jk} = \sup\limits_{x \in [x_{j,k}, x_{j,k+1}]} f \leqslant \sup\limits_{x \in [x_j,\, x_{j+1}]} f \leqslant M_j$ и

$$\overline{S}_{R'} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l_j-1} M_{jk} \Delta x_{jk} \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} M_j \sum_{k=0}^{l_j-1} \Delta x_{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \Delta x_j = \overline{S}_R,$$

*) Г. Дарбу (1842—1917) — французский математик.

и мы доказали последнее неравенство (1). Первое доказывается аналогично.

Каковы бы ни были разбиения $R_1$, $R_2$ имеет место $\underline{S}_{R_1} \leqslant \overline{S}_{R_2}$, потому что $\underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_1+R_2} \leqslant \overline{S}_{R_1+R_2} \leqslant \overline{S}_{R_2}$.

Зафиксируем $R_1$ и пусть $R$ произвольно; тогда

$$\underline{S}_{R_1} \leqslant \overline{S}_R, \quad \underline{S}_{R_1} \leqslant \inf_R \overline{S}_R = \overline{I}.$$

Число $\overline{I} = \inf\limits_R \overline{S}_R$ называется *верхним интегралом функции* $f$ на $[a, b]$. Мы доказали его существование и тот факт, что для любого $R$ (теперь мы заменяем $R_1$ на $R$) имеет место

$$\underline{S}_R \leqslant \overline{I}.$$

Но тогда существует точная верхняя грань

$$\underline{I} = \sup_R \underline{S}_R \leqslant \overline{I},$$

называемая *нижним интегралом функции* $f$ на $[a, b]$. Итак, доказано существование нижнего ($\overline{I}$) и верхнего ($\overline{I}$) интегралов $f$ на $[a, b]$ и неравенство $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Лемма 1. *Если* $E_1$, $E_2$ — *множества чисел, то*

$$\sup_{\substack{x \in E_1 \\ y \in E_2}} (x + y) = \sup_{x \in E_1} x + \sup_{y \in E_2} y.$$

Доказательство предоставляем читателю.

Лемма 2. *Если на отрезке* $[c, d]$ *задана ограниченная функция* $f$, *то*

$$\sup_{\xi, \eta \in [c,d]} [f(\xi) - f(\eta)] = \sup_{\xi, \eta \in [c,d]} |f(\xi) - f(\eta)| = M - m, \qquad (2)$$

*где* $M = M_{[c,d]} = \sup\limits_{x \in [c,d]} f(x)$, $m = m_{[c,d]} = \inf\limits_{x \in [c,d]} f(x)$.

Доказательство. Для любых $\xi, \eta \in [c, d]$

$$f(\xi) - f(\eta) \leqslant |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant M - m. \qquad (3)$$

С другой стороны, найдутся такие $\xi, \eta \in [c, d]$, что $f(\xi) > M - \varepsilon/2$; $f(\eta) < m + \varepsilon/2$; для них

$$f(\xi) - f(\eta) > (M - \varepsilon/2) - (m + \varepsilon/2) = M - m - \varepsilon.$$

Мы доказали, что первый и третий члены (2) равны. Тем более в силу (3) они равны второму члену.

Число

$$M - m = \omega = \omega_{[c, d]}$$

называется *колебанием* $f$ *на* $[c, d]$.

Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\sup_{\xi_j,\eta_j\in[x_j,x_{j+1}]} \sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j)-f(\eta_j)]\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \sup|f(\xi_j)-f(\eta_j)|\,\Delta x_j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (M_j-m_j)\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j\Delta x_j = \overline{S}_R - \underline{S}_R, \quad \omega_j = \omega_{[x_j,x_{j+1}]} \quad (4)$$

(всюду в этих соотношениях равенства!).

## § 9.4. Основная теорема

Теорема 1 (основная). *Пусть задана ограниченная на конечном отрезке $[a, b]$ функция $f$.*

*Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\underline{I}=\overline{I}$;

2) *для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое разбиение $R$, что*

$$\overline{S}_R-\underline{S}_R<\varepsilon; \tag{1}$$

3) *для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех разбиений $R$ с частичными отрезками $\Delta x_j<\delta$ имеет место неравенство* (1);

4) *существует интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx = I. \tag{2}$$

*При этом $I=\underline{I}=\overline{I}$.*

Здесь, конечно, подразумевается, что $\underline{I}$, $\overline{I}$ — нижний и верхний интегралы $f$ на $[a, b]$, а $\underline{S}_R$, $\overline{S}_R$ — нижняя и верхняя интегральные суммы $f$, соответствующие разбиению $R$.

Эту теорему можно перефразировать так:

*Для того чтобы существовал интеграл от $f$ на $[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий 1)—3). При этом величина интеграла равна $\underline{I}=\overline{I}$.*

Доказательство. 1) $\to$ 2) (из утверждения 1) следует утверждение 2)). Из 1), где считаем $\underline{I}=\overline{I}$, следует, что найдутся разбиения $R_1$, $R_2$ такие, что $\underline{I}-(\varepsilon/2)<\underline{S}_{R_1}$, $\overline{S}_{R_2}<\overline{I}+\varepsilon/2$. Тогда

$$\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{R_1}\leqslant\underline{S}_R\leqslant\overline{S}_R\leqslant\overline{S}_{R_2}\leqslant\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}, \quad R=R_1+R_2.$$

Отсюда в силу того, что $\underline{I}=\overline{I}$, имеет место 2).

2) $\to$ 1). Пусть $R$ — разбиение, для которого верно (1). Тогда в силу неравенств $\underline{S}_R\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}_R$ имеет место $\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon$. Но $\varepsilon>0$ как угодно мало, а $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — определенные числа, не зависящие от $\varepsilon$, поэтому $\underline{I}=\overline{I}$.