Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\sup_{\xi_j,\eta_j\in[x_j,x_{j+1}]}\sum_{j=0}^{n-1}[f(\xi_j)-f(\eta_j)]\,\Delta x_j=\sum_{j=0}^{n-1}\sup|f(\xi_j)-f(\eta_j)|\,\Delta x_j=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}(M_j-m_j)\,\Delta x_j=\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j\Delta x_j=\overline{S}_R-\underline{S}_R,\quad \omega_j=\omega_{[x_j,x_{j+1}]}\qquad(4)$$

(всюду в этих соотношениях равенства!).

§ 9.4. Основная теорема

Теорема 1 (основная). *Пусть задана ограниченная на конечном отрезке $[a, b]$ функция f.*

Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\underline{I}=\overline{I}$;

2) *для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое разбиение R, что*

$$\overline{S}_R-\underline{S}_R<\varepsilon;\qquad(1)$$

3) *для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех разбиений R с частичными отрезками $\Delta x_j<\delta$ имеет место неравенство* (1);

4) *существует интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx=I.\qquad(2)$$

При этом $I=\underline{I}=\overline{I}$.

Здесь, конечно, подразумевается, что $\underline{I}$, $\overline{I}$ — нижний и верхний интегралы f на $[a, b]$, а $\underline{S}_R$, $\overline{S}_R$ — нижняя и верхняя интегральные суммы f, соответствующие разбиению R.

Эту теорему можно перефразировать так:

Для того чтобы существовал интеграл от f на $[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий 1)—3). При этом величина интеграла равна $\underline{I}=\overline{I}$.

Доказательство. 1) $\to$ 2) (из утверждения 1) следует утверждение 2)). Из 1), где считаем $\underline{I}=\overline{I}$, следует, что найдутся разбиения R_1, R_2 такие, что $\underline{I}-(\varepsilon/2)<\underline{S}_{R_1}$, $\overline{S}_{R_2}<\overline{I}+\varepsilon/2$. Тогда

$$\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{R_1}\leqslant\underline{S}_R\leqslant\overline{S}_R\leqslant\overline{S}_{R_2}\leqslant\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2},\quad R=R_1+R_2.$$

Отсюда в силу того, что $\underline{I}=\overline{I}$, имеет место 2).

2) $\to$ 1). Пусть R — разбиение, для которого верно (1). Тогда в силу неравенств $\underline{S}_R\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}_R$ имеет место $\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon$. Но $\varepsilon>0$ как угодно мало, а $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — определенные числа, не зависящие от ε, поэтому $\underline{I}=\overline{I}$.

4) $\to$ 3). Пусть существует интеграл (2). Из определения интеграла следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого разбиения R, у которого $\Delta x_j < \delta$, имеют место неравенства

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_j^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

каковы бы ни были точки $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Отсюда, беря верхнюю и нижнюю грани по $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ входящей в эти неравенства суммы, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

т. е. 3).

3) $\to$ 2). Это тривиально.

2) $\to$ 3). Это самая нетривиальная часть теоремы, утверждающая, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдется зависящее от него разбиение $R_* = \{a = \overset{*}{x}_0 < \overset{*}{x}_1 < \ldots < \overset{*}{x}_n = b\}$, для которого $\overline{S}_{R_*} - \underline{S}_{R_*} < \varepsilon$, то также найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений R с $\Delta x_j < \delta$ выполняется (1).

Именно, в качестве δ возьмем число, удовлетворяющее неравенствам $2\delta < \overset{*}{x}_{j+1} - \overset{*}{x}_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$, $4n\delta K < \varepsilon$, где $K = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Тогда имеем (пишем M_j, m_j, Δx_j без индексов)

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sum{}'(M-m)\,\Delta x + \sum{}''(M-m)\,\Delta x,$$

где сумма Σ' распространена на все (замкнутые) отрезки разбиения R, каждый из которых содержит в себе одну из точек R_*, а $\sum''$ — на все остальные отрезки R.

В сумму Σ' входит не более чем $2n$ слагаемых — один отрезок покрывает точку a, другой — точку b, и каждая из точек $\overset{*}{x}_1, \ldots$ $\ldots, \overset{*}{x}_{n-1}$ покрывается одним или двумя отрезками. Имеем

$$\sum{}'(M-m)\,\Delta x \leqslant 2K\delta 2n < \varepsilon.$$

Сумму $\sum''$ запишем в виде кратной суммы $\sum'' = \sum\limits_i \sum^i$, где $\sum^i$ обозначает сумму слагаемых $\sum''$, соответствующих отрезкам R, каждый из которых попал в один и тот же интервал $(\overset{*}{x}_i, \overset{*}{x}_{i+1})$ старого разбиения R_*.

Имеем

$$\sum{}''(M-m)\,\Delta x =$$
$$= \sum_i{}'' \sum{}^i (M-m)\,\Delta x \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*) \sum{}^i \Delta x \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*)\,\Delta x_i^* < \varepsilon.$$

Поэтому $\overline{S}_R - \underline{S}_R < 2\varepsilon$ для всех разбиений R, для которых $\Delta x < \delta$, т. е. имеет место 3).

3) $\to$ 4). Пусть имеет место 3). Тогда, как уже доказано, справедливо 2) и 1). Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, как указано в 3). Тогда для разбиений R, о которых говорится в 3),

$$\underline{S}_R \leqslant \sum f(\xi_j)\,\Delta x_j \leqslant \overline{S}_R, \qquad \underline{S}_R \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_R.$$

Отсюда, полагая $I = \underline{I} = \overline{I}$, получим

$$\left| I - \sum f(\xi_j)\,\Delta x_j \right| \leqslant \overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon,$$

т. е. I есть определенный интеграл от f на $[a, b]$. Мы доказали 4). Теорема полностью доказана.

Как следствие из основной теоремы, справедлива

Теорема 2. *Пусть задана последовательность разбиений R_k*

$$a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = b \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

у которых $\max\limits_j \Delta x_j^k = \delta_k \to 0$.

Если для функции f выполняется одно из условий

$$\lim_{k\to\infty} \left(\overline{S}_{R_k}(f) - \underline{S}_{R_k}(f)\right) = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_j f\left(\xi_j^k\right) \Delta x_j^k = \lim_{k\to\infty} S_{R_k}(f) = I, \tag{5}$$

$$\lim_{k\to\infty} \overline{S}_{R_k}(f) = \lim_{k\to\infty} \underline{S}_{R_k}(f) = I, \tag{6}$$

то это влечет существование интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Наоборот, существование интеграла от f на $[a, b]$ влечет выполнение условий (4) — (6).

Из (4), так же как из (6), следует, очевидно, свойство 2) основной теоремы. Из (5) же следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется k такое, что

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < S_{R_k} < I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8}$$

каковы бы ни были $\xi_j^k \in \left[x_j^k, x_{j+1}^k\right]$. Беря верхнюю и нижнюю грани S_{R_k} по указанным ξ_j^k, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}_{R_k} \leqslant \overline{S}_{R_k} \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

откуда следует свойство 2) основной теоремы, в силу которой существует интеграл (от f на $[a, b]$), равный, очевидно, I.

Наоборот, если интеграл существует и равен I, то по его определению существует предел (5) для любой последовательности разбиений с $\delta_k \to 0$, в частности, для рассматриваемой нами последовательности. Но тогда для любого ε найдется k_0 такое, что для $k > k_0$ выполняются неравенства (8) и, следовательно, (9), имеет место (6), тем более (4).

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что *для того чтобы убедиться в существовании интеграла, достаточно убедиться, что существует предел* (5) (*при любом выборе* ξ_j^k!) *для одной какой-нибудь последовательности разбиений* R_k *с* $\delta_k \to 0$. *Например, когда* $[a, b]$ *дробится последовательно на равные части.*

Замечание. Справедлива теорема Дарбу (здесь не доказываемая), утверждающая, что для любой ограниченной на $[a, b]$ функции

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{S}(R) = \overline{I}, \quad \lim_{\delta\to 0} \underline{S}(R) = \underline{I}, \tag{10}$$

хотя f может и не быть интегрируемой ($\underline{I} < \overline{I}$).

Пример. Для функции (Дирихле) f, равной 1 в рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и 0 в иррациональных, при любом разбиении R отрезка $[0, 1]$ верхняя интегральная сумма $\overline{S}(R) = 1$, а нижняя $\underline{S}(R) = 0$. Таким образом, $\underline{I} = 0 < 1 = \overline{I}$, и функция Дирихле ограничена, но не интегрируема.

§ 9.5. Теоремы о существовании интеграла от непрерывной и монотонной функции на $[a, b]$

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a, b]$; тогда для разбиения R, у которого частичные отрезки $\Delta x_j < \delta$, имеет место ($\xi_i, \eta_j \in [x_j, x_{i+1}]$)

$$\sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)] \Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \omega(\delta) \Delta x_j = \omega(\delta)(b-a),$$

где $\omega(\delta) = \sup\limits_{\substack{x', x'' \in [a, b] \\ |x'-x''| < \delta}} |f(x') - f(x'')|$ есть модуль непрерывности f на $[a, b]$.

Поэтому

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sup_{\xi_j, \eta_j} \sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)] \Delta x_j \leqslant \omega(\delta)(b-a).$$

Но, как мы знаем, для непрерывной на замкнутом конечном отрезке $[a, b]$ функции $\omega(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$.

В силу эквивалентности условий 2) и 4) основной теоремы интеграл f на $[a, b]$ существует.

Теорема 2. *Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и монотонная на нем, интегрируема на нем.*