любого ε найдется k_0 такое, что для $k > k_0$ выполняются неравенства (8) и, следовательно, (9), имеет место (6), тем более (4).

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что *для того чтобы убедиться в существовании интеграла, достаточно убедиться, что существует предел* (5) (*при любом выборе* ξ_j^k!) *для одной какой-нибудь последовательности разбиений* R_k *с* $\delta_k \to 0$. *Например, когда* $[a, b]$ *дробится последовательно на равные части.*

Замечание. Справедлива теорема Дарбу (здесь не доказываемая), утверждающая, что для любой ограниченной на $[a, b]$ функции

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{S}(R) = \overline{I}, \quad \lim_{\delta\to 0} \underline{S}(R) = \underline{I}, \tag{10}$$

хотя f может и не быть интегрируемой ($\underline{I} < \overline{I}$).

Пример. Для функции (Дирихле) f, равной 1 в рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и 0 в иррациональных, при любом разбиении R отрезка $[0, 1]$ верхняя интегральная сумма $\overline{S}(R) = 1$, а нижняя $\underline{S}(R) = 0$. Таким образом, $\underline{I} = 0 < 1 = \overline{I}$, и функция Дирихле ограничена, но не интегрируема.

§ 9.5. Теоремы о существовании интеграла от непрерывной и монотонной функции на $[a, b]$

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a, b]$; тогда для разбиения R, у которого частичные отрезки $\Delta x_j < \delta$, имеет место ($\xi_i, \eta_j \in [x_j, x_{i+1}]$)

$$\sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\,\Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \omega(\delta)\,\Delta x_j = \omega(\delta)(b-a),$$

где $\omega(\delta) = \sup\limits_{\substack{x', x'' \in [a,b] \\ |x'-x''|<\delta}} |f(x') - f(x'')|$ есть модуль непрерывности f на $[a, b]$.

Поэтому

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sup_{\xi_j, \eta_j} \sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\,\Delta x_j \leqslant \omega(\delta)(b-a).$$

Но, как мы знаем, для непрерывной на замкнутом конечном отрезке $[a, b]$ функции $\omega(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$.

В силу эквивалентности условий 2) и 4) основной теоремы интеграл f на $[a, b]$ существует.

Теорема 2. *Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и монотонная на нем, интегрируема на нем.*

Пусть для определенности f не убывает; тогда для произвольного разбиения R при $\Delta x_j \leqslant \delta$

$$\sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\, \Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)]\, \Delta x_j \leqslant$$

$$\leqslant \delta \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)] = \delta [f(b) - f(a)] < \varepsilon \quad (\xi_j, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]),$$

если δ достаточно мало́. Отсюда, взяв верхнюю грань по ξ_j, η_j, получим

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sup \sum [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\, \Delta x_j < \varepsilon,$$

и на основании эквивалентности условий 2) и 4) основной теоремы получим, что f интегрируема на $[a, b]$.

Заметим, что монотонная на $[a, b]$ функция может иметь только конечное или счетное число точек разрыва (см. § 3.9).

Действительно, пусть $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqslant b$ — какие-либо, может быть, не все точки разрыва (первого рода) монотонной функции $f(x)$, которую мы будем считать неубывающей. Подберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы

$$x_1 + \varepsilon < x_2 - \varepsilon < x_2 + \varepsilon < x_3 - \varepsilon < \ldots$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k + \varepsilon) - f(x_k - \varepsilon)] \leqslant f(b) - f(a) = \varkappa$$

(если $x_1 = a$, то надо считать $f(a - \varepsilon) = f(a)$, а если $x_n = b$, то $f(b + \varepsilon) = f(b)$) и после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] \leqslant \varkappa$$

(если $x_1 = a$, то $x_1 - 0 = a$; если $x_n = b$, то $x_n + 0 = b$). Это неравенство показывает, что функция может иметь не больше одной точки разрыва со скачком, большим $\varkappa/2$. Если такая точка есть, то припишем ей номер 1, затем пересматриваем, имеются ли точки со скачками бо́льшими, чем $\varkappa/3$; таких точек не может быть больше чем две, и если таковые среди незанумерованных на самом деле есть, приписываем им следующие номера и т. д. В результате все точки разрыва будут перенумерованы.

§ 9.6. Теорема Лебега *)

В предыдущем параграфе было доказано, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема (по Риману) на этом отрезке. Там же доказано, что всякая монотонная (ограниченная!) на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем. Мо-

*) А. Лёбег (1875—1941) — французский математик, один из основателей современной теории функций действительного переменного.