Пусть для определенности f не убывает; тогда для произвольного разбиения R при $\Delta x_j \leqslant \delta$

$$\sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)] \Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)] \Delta x_j \leqslant$$

$$\leqslant \delta \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)] = \delta [f(b) - f(a)] < \varepsilon \quad (\xi_j, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]),$$

если δ достаточно мало́. Отсюда, взяв верхнюю грань по ξ_j, η_j, получим

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sup \sum [f(\xi_j) - f(\eta_j)] \Delta x_j < \varepsilon,$$

и на основании эквивалентности условий 2) и 4) основной теоремы получим, что f интегрируема на $[a, b]$.

Заметим, что монотонная на $[a, b]$ функция может иметь только конечное или счетное число точек разрыва (см. § 3.9).

Действительно, пусть $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqslant b$ — какие-либо, может быть, не все точки разрыва (первого рода) монотонной функции $f(x)$, которую мы будем считать неубывающей. Подберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы

$$x_1 + \varepsilon < x_2 - \varepsilon < x_2 + \varepsilon < x_3 - \varepsilon < \ldots$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k + \varepsilon) - f(x_k - \varepsilon)] \leqslant f(b) - f(a) = \varkappa$$

(если $x_1 = a$, то надо считать $f(a - \varepsilon) = f(a)$, а если $x_n = b$, то $f(b + \varepsilon) = f(b)$) и после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] \leqslant \varkappa$$

(если $x_1 = a$, то $x_1 - 0 = a$; если $x_n = b$, то $x_n + 0 = b$). Это неравенство показывает, что функция может иметь не больше одной точки разрыва со скачком, большим $\varkappa/2$. Если такая точка есть, то припишем ей номер 1, затем пересматриваем, имеются ли точки со скачками бо́льшими, чем $\varkappa/3$; таких точек не может быть больше чем две, и если таковые среди незанумерованных на самом деле есть, приписываем им следующие номера и т. д. В результате все точки разрыва будут перенумерованы.

§ 9.6. Теорема Лебега *)

В предыдущем параграфе было доказано, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема (по Риману) на этом отрезке. Там же доказано, что всякая монотонная (ограниченная!) на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем. Мо-

---

*) А. Лебег (1875—1941) — французский математик, один из основателей современной теории функций действительного переменного.

нотонная функция может иметь разрывы, но количество точек ее разрыва конечно или счетно. Возникает вопрос, как много точек разрыва может иметь функция, чтобы она оставалась все же интегрируемой по Риману. Исчерпывающий ответ на него дает

Теорема Лебега. *Для того чтобы функция f была интегрируемой на (конечном) отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на $[a, b]$ и непрерывной всюду на $[a, b]$, за исключением множества лебеговой меры нуль.*

Доказательство этой теоремы будет дано в § 12.10 для n-мерного случая.

По определению, множество e имеет лебегову меру нуль, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется покрывающая e счетная или конечная система интервалов, сумма длин которых меньше ε. Конечное и счетное множества точек имеют меру нуль. В самом деле, пусть точки множества перенумерованы: x_1, x_2, ... Покроем каждую из них интервалом так, чтобы длина интервала, покрывающего точку x_n, была меньше, чем $\varepsilon \cdot 2^{-n}$. Сумма длин этих интервалов будет меньше ε.

Таким образом, из теоремы Лебега следует, что всякая ограниченная на $[a, b]$ функция, имеющая конечное или счетное число разрывов, интегрируема по Риману.

Заметим, что среди множеств, имеющих лебегову меру нуль, имеются и несчетные множества.

Пример. Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части и средний интервал $(1/3, 2/3)$ (открытое множество) выкинем; каждый оставшийся отрезок $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ также разделим на три равные части и средние их открытые части выкинем. Оставшиеся четыре отрезка разделим на три части и средние открытые части выкинем. В результате этого процесса, продолженного неограниченно, будет выброшено счетное число интервалов общей длины, равной $1 = (1/3) + (2/9) + (4/27) + \ldots$ Оставшееся на $[0, 1]$ множество E замкнуто.

Можно доказать (см., например, П. С. Александров и А. Н. Колмогоров. Введение в теорию функций действительного переменного, М., ГТТИ, изд. 3, 1938), что E не только замкнуто, но и совершенно — любая точка E есть предельная точка E, а также E нигде не плотно на $[0, 1]$ — любой интервал содержит в себе точки, отличные от E; кроме того, E несчетно и в то же время имеет лебегову меру нуль. E называется *канторовым множеством меры нуль.*

Зададим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \in [0, 1] - E). \end{cases}$$

Она, очевидно, непрерывна во всех точках $[0, 1] - E$ и разрывна во всех точках E.

Таким образом, функция f может служить примером интегрируемой по Риману функции, имеющей несчетное множество точек разрыва.