§ 9.7. Аддитивные и однородные свойства интеграла

Теорема 1. *Если f интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то она также интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, и наоборот. При этом*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность разбиений R_k, содержащих в себе точку c, со стремящимся к нулю максимальным частичным отрезком. R_k индуцирует на $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно разбиения R_k' и R_k'',

$$\overline{S}_{R_k} - \underline{S}_{R_k} = \left(\overline{S}_{R_k'} - \underline{S}_{R_k'}\right) + \left(\overline{S}_{R_k''} - \underline{S}_{R_k''}\right), \tag{2}$$

Если теперь интеграл от f на $[a, b]$ существует, то в силу теоремы § 9.4 левая часть (2) стремится при $k \to \infty$ к нулю, а следовательно, и каждое слагаемое (неотрицательное!) правой части стремится к нулю, что влечет по той же теореме существование интегралов от f на $[a, c]$ и $[c, b]$. Поэтому из очевидного равенства

$$S_{R_k} = S_{R_k'} + S_{R_k''}$$

следует после перехода к пределу при $k \to \infty$ равенство (1).

Наоборот, если существуют интегралы от f на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то для произвольных их разбиений R_k' и R_k'' со стремящимися к нулю максимальными частичными отрезками отдельные слагаемые правой части (2) стремятся при $k \to \infty$ к нулю, но тогда и левая часть (2) стремится к нулю, что влечет за собой существование интеграла f на $[a, b]$.

Мы определили интеграл от f на $[a, b]$, где $a < b$. Но полезно расширить это определение, считая в случае $a > b$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

При таком расширенном понимании символа $\int_a^b$ равенство (1), как нетрудно проверить, сохраняется для любых a, b, c, если только существует интеграл на наибольшем среди отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$.

Мы считаем здесь, что $[a, b]$ — отрезок, соединяющий точки a и b, и даже называем отрезком $[a, a]$ точку a.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ — интегрируемы на $[a, b]$ функции и C — постоянная; тогда*

1) $f(x)\pm\varphi(x)$, 2) $Cf(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f(x)\varphi(x)$, 5) $\frac{1}{f(x)}$, *где* $|f(x)|>d>0$ *на* $[a, b]$ — *суть интегрируемые функции. При этом*

$$\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3'}$$

Заметим, что факт интегрируемости указанных функций непосредственно следует из теоремы Лебега, если принять во внимание, что лебегова мера суммы двух множеств, имеющих лебегову меру нуль, очевидно, в свою очередь равна нулю. Но можно доказать это утверждение, не прибегая к теореме Лебега.

Берем произвольное разбиение $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Тогда

$$\lim_{\max\Delta x_j\to 0}\sum_j [f(\xi_j)\pm\varphi(\xi_j)]\,\Delta x_j =$$

$$= \lim\sum_j f(\xi_j)\,\Delta x_j \pm \lim\sum_j \varphi(\xi_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

потому что, по условию, интегралы от $f(x)$ и $\varphi(x)$ существуют. Таким образом, предел в левой части этих соотношений существует и равен правой части. Но это значит, что имеет место (3).

Подобным образом

$$\int_a^b Cf\,dx = \lim_{\max\Delta x_j\to 0}\sum Cf(\xi_j)\,\Delta x_j = C\lim\sum f(\xi_j)\,\Delta x_j = C\int_a^b f\,dx.$$

Мы доказали 1), 2), (3) и (3').

Будем обозначать через $M_f=\sup\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f$, $m_f=\inf\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f$. Будем считать, что $K_f=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f|$. Имеем для произвольных $\xi,\eta\in[x_j, x_{j+1}]$

$$|f(\xi)|-|f(\eta)|\leqslant|f(\xi)-f(\eta)|\leqslant M_f-m_f,$$

$$f(\xi)\varphi(\xi)-f(\eta)\varphi(\eta)\leqslant|f(\xi)|\,|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|+$$
$$+|\varphi(\eta)|\,|f(\xi)-f(\eta)|\leqslant K_f(M_\varphi-m_\varphi)+K_\varphi(M_f-m_f),$$

$$\frac{1}{f(\xi)}-\frac{1}{f(\eta)}=\frac{f(\xi)-f(\eta)}{f(\xi)\,f(\eta)}\leqslant\frac{1}{d^2}(M_f-m_f).$$

Беря верхние грани левых частей полученных неравенств по $\xi, \eta \in [x_j, x_{j+1}]$, умножая их на Δx_j и суммируя по j, получим

$$\sum (M_{|f|} - m_{|f|}) \Delta x \leqslant \sum (M_f - m_f) \Delta x, \tag{4}$$

$$\sum (M_{f\varphi} - m_{f\varphi}) \Delta x \leqslant K_f \sum (M_\varphi - m_\varphi) \Delta x + K_\varphi \sum (M_f - m_f) \Delta x, \tag{5}$$

$$\sum (M_{1/f} - m_{1/f}) \Delta x \leqslant \frac{1}{d^2} \sum (M_f - m_f) \Delta x \tag{6}$$

(мы опустили j у Δx_j). Но вследствие интегрируемости f и φ правые части (4) — (6) при $\Delta x < \delta$, где δ достаточно мало, можно сделать как угодно малыми, но тогда и левые. В случае (5) найдем для данного ε разбиения R_1, R_2, для которых

$$\overline{S}_{R_1}(f) - \underline{S}_{R_1}(f) < \varepsilon, \quad \overline{S}_{R_2}(\varphi) - \underline{S}_{R_2}(\varphi) < \varepsilon.$$

Эти неравенства верны, если заменить R_1, R_2 на $R = R_1 + R_2$.

Заметим, что из интегрируемости $|f(x)|$ не следует интегрируемость $f(x)$, как это легко видеть на примере функции, равной 1 в рациональных точках $[a, b]$ и -1 в иррациональных.

§ 9.8. Неравенства и теорема о среднем

Теорема 1. *Если f и φ интегрируемы и удовлетворяют неравенству $f(x) \leqslant \varphi(x)$ на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx. \tag{1}$$

Существование этих интегралов уже предположено и надо доказать только само неравенство. Имеем, очевидно, для любого разбиения R

$$\sum f(\xi_j) \Delta x_j \leqslant \sum \varphi(\xi_j) \Delta x_j.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta x_j \to 0$, получим (1).

Теорема 2. *Если f интегрируема на $[a, b]$, то*

$$\left| \int_a^b f\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx \leqslant K(b-a), \tag{2}$$

где $K = \sup\limits_{a<x<b} |f(x)|$.

Имеем $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Поэтому по предыдущей теореме

$$-\int_a^b |f|\,dx = \int_a^b (-|f|)\,dx \leqslant \int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx,$$