Беря верхние грани левых частей полученных неравенств по $\xi, \eta \in [x_j, x_{j+1}]$, умножая их на Δx_j и суммируя по j, получим

$$\sum (M_{|f|} - m_{|f|}) \Delta x \leqslant \sum (M_f - m_f) \Delta x, \tag{4}$$

$$\sum (M_{f\varphi} - m_{f\varphi}) \Delta x \leqslant K_f \sum (M_\varphi - m_\varphi) \Delta x + K_\varphi \sum (M_f - m_f) \Delta x, \tag{5}$$

$$\sum (M_{1/f} - m_{1/f}) \Delta x \leqslant \frac{1}{d^2} \sum (M_f - m_f) \Delta x \tag{6}$$

(мы опустили j у Δx_j). Но вследствие интегрируемости f и φ правые части (4) — (6) при $\Delta x < \delta$, где δ достаточно мало, можно сделать как угодно малыми, но тогда и левые. В случае (5) найдем для данного ε разбиения R_1, R_2, для которых

$$\overline{S}_{R_1}(f) - \underline{S}_{R_1}(f) < \varepsilon, \quad \overline{S}_{R_2}(\varphi) - \underline{S}_{R_2}(\varphi) < \varepsilon.$$

Эти неравенства верны, если заменить R_1, R_2 на $R = R_1 + R_2$.

Заметим, что из интегрируемости $|f(x)|$ не следует интегрируемость $f(x)$, как это легко видеть на примере функции, равной 1 в рациональных точках $[a, b]$ и -1 в иррациональных.

§ 9.8. Неравенства и теорема о среднем

Теорема 1. *Если f и φ интегрируемы и удовлетворяют неравенству $f(x) \leqslant \varphi(x)$ на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx. \tag{1}$$

Существование этих интегралов уже предположено и надо доказать только само неравенство. Имеем, очевидно, для любого разбиения R

$$\sum f(\xi_j) \Delta x_j \leqslant \sum \varphi(\xi_j) \Delta x_j.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta x_j \to 0$, получим (1).

Теорема 2. *Если f интегрируема на $[a, b]$, то*

$$\left| \int_a^b f\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx \leqslant K(b-a), \tag{2}$$

где $K = \sup\limits_{a<x<b} |f(x)|$.

Имеем $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Поэтому по предыдущей теореме

$$-\int_a^b |f|\,dx = \int_a^b (-|f|)\,dx \leqslant \int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx,$$

откуда следует первое неравенство (2). Далее, $|f| \leqslant K$, поэтому

$$\int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b K\,dx = K(b-a),$$

и мы получили второе неравенство (2).

В теореме 2 имелось в виду, что $a < b$. Если $a > b$, то

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_b^a f\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f|\,dx \leqslant (a-b)K = K|b-a|.$$

Теорема 3 (о среднем). *Если f и φ интегрируемы на $[a, b]$ и $\varphi(x) \geqslant 0$, то*

$$\int_a^b f\varphi\,dx = \Lambda \int_a^b \varphi\,dx, \tag{3}$$

где $m \leqslant \Lambda \leqslant M$, $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Действительно, в силу того, что $\varphi(x) \geqslant 0$,

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x). \tag{4}$$

Интегрируя эти неравенства, получим

$$m\int_a^b \varphi\,dx \leqslant \int_a^b f\varphi\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi\,dx. \tag{5}$$

Если $\int_a^b \varphi\,dx = 0$, то второй интеграл в этих соотношениях также равен 0 и равенство (3) очевидно; если же $\int_a^b \varphi\,dx > 0$, то из (5) следует

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f\varphi\,dx}{\int_a^b \varphi\,dx} \leqslant M,$$

т. е. второй член в этих соотношениях равен числу Λ, удовлетворяющему неравенствам $m \leqslant \Lambda \leqslant M$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если в этой теореме f непрерывна на $[a, b]$, то найдутся точки x_1, $x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_2) = M$, $f(x_1) = m$ и точка $\xi \in [x_1, x_2]$ такая, что $f(\xi) = \Lambda$, поэтому в случае непре-*

рывной на $[a, b]$ функции f равенство (3) можно записать в виде

$$\int_a^b f\varphi\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi\,dx \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{6}$$

Теорема 4. *Если f — интегрируемая неотрицательная на $[a, b]$ функция такая, что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ ее непрерывности $f(x_0) > 0$, то*

$$\int_a^b f\,dx > 0.$$

В самом деле, из условия теоремы следует, что существует число $\lambda > 0$ и отрезок $\sigma \subset [a, b]$, содержащий в себе x_0 такие, что $f(x) \geqslant \lambda$ на σ. Пусть $\delta = \overline{[a, b] - \sigma}$ — множество (состоящее из одного или двух отрезков). Тогда

$$\int_a^b f\,dx = \int_\sigma f\,dx + \int_\delta f\,dx \geqslant \int_\sigma f\,dx \geqslant \lambda\,|\sigma| > 0,$$

где $|\sigma|$ — длина σ.

§ 9.9. Интеграл как функция верхнего предела. Теорема Ньютона — Лейбница

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана интегрируемая функция f. Начнем с того, что отметим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du,$$

т. е. не имеет никакого значения, какая буква (x или u) стоит под знаком f в определенном интеграле по отрезку $[a, b]$.

Зададим произвольное значение $x \in [a, b]$ и определим новую функцию $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Она определена для всех значений $x \in [a, b]$, потому что мы знаем, что если существует интеграл от f на $[a, b]$, то существует также интеграл от f на $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$. Напомним, что мы считаем, по определению,

$$F(a) = \int_a^a f\,dt = 0. \tag{1}$$

Заметим, что

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$