рывной на $[a, b]$ функции f равенство (3) можно записать в виде

$$\int_a^b f\varphi\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi\,dx \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{6}$$

Теорема 4. *Если f — интегрируемая неотрицательная на $[a, b]$ функция такая, что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ ее непрерывности $f(x_0) > 0$, то*

$$\int_a^b f\,dx > 0.$$

В самом деле, из условия теоремы следует, что существует число $\lambda > 0$ и отрезок $\sigma \subset [a, b]$, содержащий в себе x_0 такие, что $f(x) \geqslant \lambda$ на σ. Пусть $\delta = \overline{[a, b] - \sigma}$ — множество (состоящее из одного или двух отрезков). Тогда

$$\int_a^b f\,dx = \int_\sigma f\,dx + \int_\delta f\,dx \geqslant \int_\sigma f\,dx \geqslant \lambda|\sigma| > 0,$$

где $|\sigma|$ — длина σ.

§ 9.9. Интеграл как функция верхнего предела. Теорема Ньютона — Лейбница

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана интегрируемая функция f. Начнем с того, что отметим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du,$$

т. е. не имеет никакого значения, какая буква (x или u) стоит под знаком f в определенном интеграле по отрезку $[a, b]$.

Зададим произвольное значение $x \in [a, b]$ и определим новую функцию $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Она определена для всех значений $x \in [a, b]$, потому что мы знаем, что если существует интеграл от f на $[a, b]$, то существует также интеграл от f на $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$. Напомним, что мы считаем, по определению,

$$F(a) = \int_a^a f\,dt = 0. \tag{1}$$

Заметим, что

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Покажем, что F *непрерывна на* $[a, b]$. В самом деле, пусть x, $x+h \in [a, b]$; тогда

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

и, если $K=\sup|f(t)|$, $a \leqslant t \leqslant b$, то

$$|F(x+h)-F(x)| \leqslant \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leqslant K|h| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Таким образом, F непрерывна на $[a, b]$ независимо от того, имеет или нет f разрывы; важно, что f интегрируема на $[a, b]$.

На рис. 9.1 изображен график f. Площадь переменной фигуры $aABx$ равна $F(x)$. Ее приращение $F(x+h)-F(x)$ равно площади фигуры $xBC(x+h)$, которая в силу ограниченности f, очевидно, стремится к нулю при $h \to 0$ независимо от того, будет ли x точкой непрерывности или разрыва f, например, точкой $x=d$.

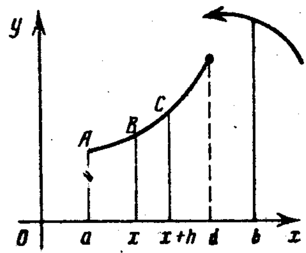

Рис. 9.1.

Пусть теперь *функция* f *не только интегрируема на* $[a, b]$, *но непрерывна в точке* $x \in [a, b]$. Докажем, что *тогда* F *имеет в этой точке производную, равную*

$$F'(x)=f(x). \tag{2}$$

В самом деле, для указанной точки x (пояснения ниже)

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(x)+\eta(t)]\,dt=$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\eta(t)\,dt=f(x)+o(1) \quad (h \to 0). \tag{3}$$

Мы положили $f(t)=f(x)+\eta(t)$, а так как $f(x)$ — постоянная относительно t, то $\int_x^{x+h} f(x)\,dt=f(x)h$. Далее, в силу непрерывности f в точке x для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое δ, что $|\eta(t)|<\varepsilon$ для $|x-t|<\delta$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\eta(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|h|}|h|\varepsilon=\varepsilon \text{ для } |h|<\delta,$$

что доказывает, что левая часть этого неравенства есть $o(1)$ при $h \to 0$.

Переход к пределу в (3) при $h \to 0$ показывает существование производной от F в точке x и справедливость равенства (2). При $x = a$, b речь здесь идет соответственно о правой и левой производной.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то на основании доказанного выше соответствующая ей функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{4}$$

имеет призводную, равную $f(x)$: $F'(x) = f(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$. Следовательно, функция $F(x)$ есть первообразная от f на $[a, b]$.

Мы доказали, что *произвольная непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* f *имеет на этом отрезке первообразную, определенную равенством* (4). Этим *доказано существование первообразной для всякой непрерывной на отрезке функции* (см. § 8.1).

Пусть теперь $\Phi(x)$ есть произвольная первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Мы знаем, что $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. Полагая в этом равенстве $x = a$ и учтя, что $F(a) = 0$, получим $\Phi(a) = C$.

Таким образом, $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. Но

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b).$$

Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{5}$$

Мы доказали важную теорему:

Теорема 1 (Ньютона — Лейбница). *Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ — ее любая первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство* (5).

Из (5) по теореме Лагранжа следует:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b),$$

где $\xi \in (a, b)$ — некоторая точка. Этим уточняется равенство § 9.8, (6) при $\varphi(x) = 1$, где утверждалось, что $\xi \in [a, b]$.

Теорему 1 можно обобщить.

Теорема 2. *Для непрерывной кусочно гладкой на* $[a, b]$ *функции F имеет место*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть (см. § 5.15)

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

где $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — точки разрыва F' (первого рода!). Тогда (пояснения ниже)

$$F(b) - F(a) = \sum_{0}^{n-1} [F(x_{j+1}) - F(x_j)] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F'(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx. \tag{7}$$

Второе равенство в (7) верно, потому что для любого j

$$F(x_{j+1}) - F(x_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} F'(x)\,dx. \tag{8}$$

Ведь производная $F'(x)$ существует и непрерывна на интервале (x_j, x_{j+1}). Кроме того, существуют пределы $F'(x_j+0)$, $F'(x_{j+1}-0)$, которые равны соответственно правой и левой производной от F в точках $x = a, b$.

Из интегрируемости F' на каждом из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ следует ее интегрируемость на $[a, b]$ и последнее равенство (7).

Замечание. Функция F' не определена в точках $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n-1} \in [a, b]$, но это не мешает ей быть интегрируемой на $[a, b]$ (см. подробнее по этому поводу § 9.11).

Теорема 3. *Для непрерывных кусочно гладких на* $[a, b]$ *функций* $u(x)$, $v(x)$ *имеет место формула интегрирования по частям:*

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx. \tag{9}$$

Ведь произведение $u(x)v(x)$ есть также непрерывная кусочно гладкая на $[a, b]$ функция, имеющая, таким образом, всюду на $[a, b]$, за исключением конечного числа точек, производную, вычисляемую по формуле

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Если учесть еще, что функции $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то в силу предыдущей теоремы

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx,$$

откуда следует (9).

Теорема 4 (о замене переменной). *Справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{10}$$

где функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$, $a=\varphi(c)$, $b=\varphi(d)$ и значения $\varphi(t)$ $(c\leqslant t\leqslant d)$ принадлежат отрезку $[A, B]$, на котором $f(x)$ непрерывна. (Таким образом, $[a, b]\subset[A, B]$.)

В самом деле, пусть $F(x)$ и $\Phi(t)$ — соответственно первообразные функции $f(x)$ и $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Тогда (см. § 8.1, (2)) имеет место тождество $\Phi(t)=F[\varphi(t)]+C$, $c\leqslant t\leqslant d$, где C — некоторая постоянная. Теперь (10) следует из очевидного равенства

$$F(b)-F(a)=F[\varphi(d)]-F[\varphi(c)]=\Phi(d)-\Phi(c)$$

на основании теоремы Ньютона — Лейбница.

Пример 1. $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_0^\pi = 2$ в силу теоремы Ньютона — Лейбница: $\sin x$ непрерывна на $[0, \pi]$, $-\cos x$ ее первообразная.

Пример 2.

$$\int_a^b \operatorname{sign} t\,dt = |t|\,\Big|_a^b = |b|-|a| \tag{11}$$

в силу теоремы 2, потому что $|x|$ есть непрерывная кусочно гладкая (или гладкая, если $ab\geqslant 0$) функция на отрезке $[a, b]$, а $\operatorname{sign} x$ — ее производная, существующая всюду на $[a, b]$, за исключением точки $x=0$.

В частности, из (11) следует:

$$\int_0^x \operatorname{sign} t\,dt = |x|.$$

§ 9.10. Вторая теорема о среднем

Теорема. *Если функция φ — неотрицательная неубывающая на отрезке $[a, b]$, а f — интегрируемая на $[a, b]$, то существует точка $\xi\in[a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Будем сначала считать, что φ имеет непрерывную производную на $[a, b]$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = -\varphi(x)\int_x^b f(u)\,du\,\Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x)\int_x^b f(u)\,du\,dx =$$

$$= \varphi(a)\int_a^b f(u)\,du + \int_a^b \varphi'(x)\int_x^b f(u)\,du\,dx. \tag{2}$$