Глава 10

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 10.1. Площадь в полярных координатах

Площадь S фигуры, ограниченной двумя выходящими из полярного полюса O лучами $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_*$ и кривой Γ, заданной в полярных координатах непрерывной функцией $\rho = f(\theta)$, может быть определена следующим образом (рис. 10.1).

Производим разбиение отрезка $[\theta_0, \theta_*]$ изменения θ:

$$\theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \theta_*.$$

Элемент площади фигуры, ограниченной кривой Γ и лучами $\theta = \theta_k$, $\theta = \theta_{k+1}$, приближенно выражаем площадью кругового

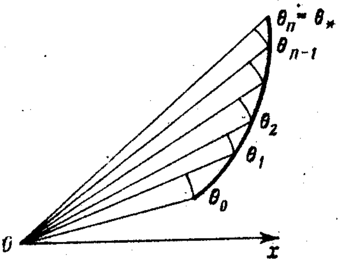

Рис. 10.1.

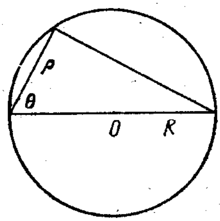

Рис. 10.2.

сектора, ограниченного теми же лучами и окружностью радиуса $\rho_k = f(\theta_k)$, равной $\frac{1}{2}\rho_k^2\Delta\theta_k$, $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$.

Естественно считать, по определению,

$$S = \lim_{\max\Delta\theta_k \to 0} \sum_{0}^{n-1} \rho_k^2\Delta\theta_k = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} f^2(\theta)\, d\theta. \qquad (1)$$

Мы получили формулу площади фигуры в полярных координатах. Для непрерывной функции $f(\theta)$ интеграл (1), как мы знаем, существует.

Конечно, возникает вопрос, будет ли определенная таким образом величина S равна тому же числу, как если бы мы вычислили площадь нашей фигуры в декартовых координатах. Этот вопрос положительно решается на основании общей теории меры по Жордану (см. § 12.4).

Пример. Изображенная на рис. 10.2 окружность в полярных координатах определяется уравнением $\rho = 2R\cos\theta$. В силу (1) ее площадь равна

$$S = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi R^2.$$

§ 10.2. Объем тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y непрерывной положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью вращения кривой Γ вокруг оси x.

Производим разбиение отрезка $[a, b]$ на части $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ и считаем, что элемент ΔV объема тела, ограниченный плоскостями $x = x_k$, $x = x_{k+1}$, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \sim \pi y_k^2 \cdot \Delta x_k = \pi f(x_k)^2 \Delta x_k.$$

Величина $V_n = \pi \sum\limits_0^{n-1} f(x_k)^2 \Delta x_k$ приближенно выражает V и

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_0^{n-1} f(x_k)^2 \Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{1}$$

Мы получили формулу объема тела вращения. Приведем еще другой вывод этой формулы, основанной на введении дифференциала объема. Обозначим через $V(x)$ объем части тела, заключенный между плоскостями, проходящими через точки a и x оси x, перпендикулярно к последней (рис. 10.3). Приращение $\Delta V(x)$, соответствующее приращению $\Delta x > 0$, есть объем части тела, заключенной между плоскостями, перпендикулярными к оси x, проходящими через точки x и $x + \Delta x$.

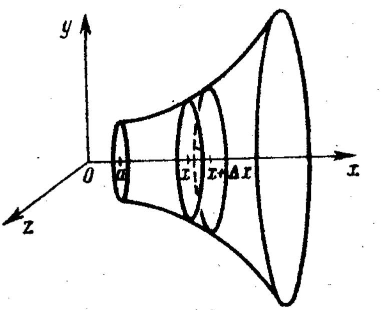

Рис. 10.3.

Докажем, что имеет место равенство

$$\Delta V = \pi f^2(x)\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0). \tag{2}$$

В самом деле, пусть

$$m = \min_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi), \quad M = \max_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi).$$