$f \in W^r_-(x_k, x_{k+1})$ при любом k, то в силу (10)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N}t\right)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^{N-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{N} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N}t\right)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{b-a}{N}\right)^{r+1} \varkappa \left\| f^{(r)} \right\|_{(x_k, x_{k+1})} \leqslant \frac{(b-a)^{r+1}\varkappa}{N^r} \left\| f^{(r)} \right\|_{(a,b)}. \quad (11)$$

Будем говорить, что усложненная квадратурная формула имеет свойство T^{r-1}, если она точна для многочленов степени $r-1$. Мы только что доказали, что если функция $f \in W^r(a, b) = W^r$ и ее интеграл на $[a, b]$ приблизить при помощи усложненной квадратурной формулы (5) со свойством T^{r-1}, то оценка приближения имеет порядок N^{-r}.

Отметим без доказательства, что если $f \in W^k$ и формула имеет свойство T^{r-1}, то оценка приближения при $k < r$ и $k \geqslant r$ имеет соответственно порядок N^{-k}, N^{-r}.

Например, усложненная формула Симпсона имеет свойство T^3, поэтому при приближении при ее помощи функций $f \in W^k$ при $k \geqslant 4$ оценка имеет порядок N^{-4}, а при $k < 4$ — порядок N^{-k}.

В заключение сделаем еще следующее замечание. Зададим систему узлов $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$. Произвольный многочлен $P(x)$ степени r можно представить тождественно при помощи интерполяционной формулы Лагранжа (3), (4) § 10.5, где надо считать $n = r$.

Если положить

$$\lambda_k = \int_a^b Q_k(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, r),$$

то мы получим квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^r \lambda_k f(x_k),$$

точную для любого многочлена степени r.

§ 10.10. Еще о длине дуги

В дальнейшем без пояснений предполагается, что Г есть непрерывная самонепересекающаяся кривая, определенная непрерывными функциями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \geqslant t \geqslant b, \quad (1)$$

Введем обозначения: ρ есть некоторое разбиение

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b \quad (2)$$

отрезка $[a, b]$.

$$\delta_\rho = \max_k \Delta t_k, \quad \sigma_\rho = \max_k \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2},$$

Γ_ρ — вписанная в Γ ломаная с вершинами, соответствующими значениям $t_j \in \rho$, и, наконец, $|\Gamma|$, $|\Gamma_\rho|$ — длины соответственно Γ и Γ_ρ. Если Γ не спрямляема, то считаем $|\Gamma| = \infty$.

Отметим свойства:

1. *Соотношения*

$$\delta_\rho \to 0, \tag{3}$$

$$\sigma_\rho \to 0 \tag{4}$$

вытекает одно из другого и, следовательно, длину непрерывной кривой Γ *можно определить при помощи одного из двух равенств*

$$|\Gamma| = \lim_{\delta_\rho \to 0} |\Gamma_\rho| = \lim_{\sigma_\rho \to 0} |\Gamma_\rho|. \tag{5}$$

В самом деле, из (3) следует (4), потому что функции φ, ψ, χ равномерно непрерывны на $[a, b]$. Далее, уравнения (1) определяют операцию, отображающую отрезок $[a, b]$ значений t на множество Γ точек (x, y, z). Она непрерывна, и потому Γ ограничено и замкнуто (см. теорему 1 § 12.20). В силу же самонепересекаемости Γ эта операция устанавливает взаимно однозначно соответствие $[a, b] \rightleftarrows \Gamma$, и потому (см. ту же теорему) обратная ей операция непрерывна, т. е. представляет собой непрерывную функцию $t = \Phi(x, y, z)$ на замкнутом ограниченном множестве Γ, следовательно, равномерно непрерывную на Γ.

2. *Если* $\rho \subset \rho'$, *т. е. все точки* $t_j \in \rho$ *принадлежат также* ρ', *то*

$$|\Gamma_\rho| \leqslant |\Gamma_{\rho'}|. \tag{6}$$

Это очевидно. Добавление к ρ еще одной точки t_j приводит к тому, что некоторое звено ломаной Γ_ρ заменяется на два звена, образующие с ним треугольник (возможно, и вырожденный).

3. *Справедливы соотношения*

$$\sup_\rho |\Gamma_\rho| = \lim_{\delta_\rho \to 0} |\Gamma_\rho| = |\Gamma|. \tag{7}$$

Число $|\Gamma|$, которое они определяют, может быть конечным, и тогда кривая Γ спрямляема и $|\Gamma|$ — ее длина (см. § 6.7). Если же $|\Gamma| = +\infty$, то кривая Γ не спрямляема.

Чтобы доказать (7), положим $\Lambda = \sup |\Gamma_\rho|$ и зададим произвольные числа Λ', Λ'' такие, что $\Lambda' < \Lambda'' < \Lambda$. В силу свойства точной верхней грани существует разбиение $\rho_* = \{a = t_0^* < t_1^* < \ldots < t_N^* = b\}$ такое, что $\Lambda'' < |\Gamma_{\rho*}|$.

Зададим положительное $\varepsilon < \Lambda'' - \Lambda'$ и подберем, пользуясь равномерной непрерывностью функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ на $[a, b]$, такое $\delta > 0$, что для всех t, $t + \Delta t \in [a, b]$, $|\Delta t| < \delta$, выполняется неравенство

$$\lambda = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} < \varepsilon/2N,$$

где λ — длина хорды, соединяющей точки Γ, соответствующие t и $t + \Delta t$.

Для произвольного разбиения ρ отрезка $[a, b]$ с $\delta_\rho < \delta$ имеют место неравенства (пояснения ниже)

$$\Lambda'' < |\Gamma_{\rho*}| < |\Gamma_{\rho+\rho*}| < |\Gamma_\rho| + \varepsilon, \tag{8}$$

или $\Lambda' < |\Gamma_\rho|$.

Третье неравенство в цепи (8) объясняется следующим образом. Пусть AA' — хорда, соединяющая две соседние вершины Γ_ρ, а дуга $\smile{AA'} \subset \Gamma$ содержит внутри себя вершины $\Gamma_{\rho*}$, число которых пусть будет ν. Впишем в $\smile{AA'}$ ломаную $\gamma_{AA'}$ с вершинами, совпадающими с указанными вершинами $\Gamma_{\rho*}$. Количество звеньев этой ломаной равно $\nu+1$, а каждое звено имеет длину, не превышающую $\varepsilon/2N$, поэтому длина $\gamma_{AA'}$ не больше чем $\frac{\varepsilon(\nu+1)}{2N}$.

Если произвести такую замену хорд $\overline{AA'} \subset \Gamma_\delta$ на соответствующие ломаные γ_{AA} для всех дуг $\smile{AA'}$, внутри которых имеются точки $\Gamma_{\rho*}$, то в результате Γ_ρ превратится в $\Gamma_{\rho+\rho*}$, и, так как количество вершин $\Gamma_{\rho*}$, которые могут попасть в ту или иную дугу $\gamma_{AA'}$, не больше чем N, то

$$|\Gamma_{\rho+\rho*}| < |\Gamma_\rho| + \varepsilon,$$

т. е. выполняется третье неравенство (8).

Мы доказали, что для любого числа $\Lambda' < \Lambda$ найдется $\delta > 0$ такое, что выполняются неравенства $\Lambda' < |\Gamma_\rho| \leqslant \Lambda$ для всех Γ_δ с $\delta_\rho < \delta$.

Этим доказано (7), где $|\Gamma| = \Lambda$.

4. *Если Γ спрямляема на $[a, b]$, то и на $[a, c]$ и на $[c, b]$, $a < c < b$; и наоборот, если Γ спрямляема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то и на $[a, b]$. При этом*

$$|\Gamma| = |\Gamma_{ac}| + |\Gamma_{cb}|. \tag{9}$$

Доказательство. Зададим последовательность разбиений ρ^k отрезка $[a, b]$ с $\delta_{\rho^k} \to 0$ $(k \to \infty)$. Предполагаем, что Γ_{ρ^k} при любом k содержит в себе точку c. Тогда Γ_{ρ^k} индуцирует на $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно разбиения ρ_1^k и ρ_2^k с $\delta_{\rho_1^k}$, $\delta_{\rho_2^k} \to 0$ $(k \to \infty)$ и

$$|\Gamma_{\rho^k}| = |\Gamma_{\rho_1^k}| + |\Gamma_{\rho_2^k}| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Если Γ спрямляема, то $|\Gamma| < \infty$ и $|\Gamma_{\rho_k}| \to |\Gamma|$. Но тогда последовательности $|\Gamma_{\rho_1^k}|$ и $|\Gamma_{\rho_2^k}|$ ограничены, и так как $\delta_{\rho_1^k}$, $\delta_{\rho_2^k} \to 0$, то они стремятся соответсвенно к конечным пределам $|\Gamma_{ac}|$, $|\Gamma_{cb}|$. Таким образом, Γ_{ac} и Γ_{cb} спрямляемы и из (10) после перехода к пределу при $k \to \infty$ следует (9).

Наоборот, если Γ_{ac} и Γ_{cb} спрямляемы, то $|\Gamma_{\rho_1^k}| \to |\Gamma_{ac}|$, $|\Gamma_{\rho_2^k}| \to |\Gamma_{cb}|$, но тогда в силу (10) существует предел $|\Gamma_{\rho^k}|$, и так как $\delta_{\rho^k} \to 0$, то в силу свойства 3 кривая Γ спрямляема.

5. *Пусть $\Gamma_\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}\right)$ обозначает дугу Γ, соответствующую отрезку $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Если Γ_ε спрямляема при любом указанном ε, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma_\varepsilon| = |\Gamma|. \tag{11}$$

Таким образом, для спрямляемости Γ необходима и достаточна конечность предела в (11).

Доказательство. Впишем в Γ_ε ломаную Γ'_ε со звеньями, не превышающими ε, такую, что

$$|\Gamma_\varepsilon| - \varepsilon < |\Gamma'_\varepsilon| \leqslant |\Gamma_\varepsilon|, \tag{12}$$

и пусть Γ''_ε — полученная добавлением к Γ'_ε двух звеньев ломаная, вписанная в Γ.

В силу непрерывности Γ

$$|\Gamma''_\varepsilon| - |\Gamma'_\varepsilon| \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{13}$$

Очевидно, что $|\Gamma_\varepsilon|$ не убывает при монотонном стремлении ε к нулю. Поэтому предел (11), конечный или бесконечный, существует и равен на основании (12), (13)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma_\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma'_\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma''_\varepsilon| = |\Gamma|,$$

где последнее равенство следует из (7).

§ 10.11. Число π. Тригонометрические функции

Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$. Верхняя ее полуокружность Γ описывается непрерывной функцией $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Но производная $f'(x) = -x/\sqrt{1 - x^2}$ непрерывна только на интервале $(-1, 1)$. Поэтому формулу длины дуги § 10.3, (4) в данном случае законно пока применить только к отрезку $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ $[0 < \varepsilon < 1)$, на котором f непрерывна вместе со своей производной:

$$|\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1 + f'(x^2)^2}\, dx = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Но функция $(1 - x^2)^{-1/2}$ интегрируема на отрезке $[-1, +1]$, если интеграл понимать в несобственном смысле, поэтому по свойству § 10.10, (11)

$$|\Gamma| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} < \infty, \tag{1}$$

и мы доказали, что полуокружность Γ спрямляема и длина ее выражается числом, равным интегралу справа (1). Это число называется числом π:

$$\pi = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{2}$$

Мы дали обоснование существования этого важного предела со всей строгостью, предъявляемой в современном математическом анализе. В элементарной геометрии дается корректное определение длины дуги окружности, но существование ее обосновывается в общем при помощи интуитивных соображений, хотя и сопровождается логическими выкладками. Функция $\arccos x$ может быть определена при помощи равенства

$$\theta = \arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$