Доказательство. Впишем в Γ_ε ломаную Γ'_ε со звеньями, не превышающими ε, такую, что

$$|\Gamma_\varepsilon| - \varepsilon < |\Gamma'_\varepsilon| \leqslant |\Gamma_\varepsilon|, \tag{12}$$

и пусть Γ''_ε — полученная добавлением к Γ'_ε двух звеньев ломаная, вписанная в Γ.

В силу непрерывности Γ

$$|\Gamma''_\varepsilon| - |\Gamma'_\varepsilon| \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{13}$$

Очевидно, что $|\Gamma_\varepsilon|$ не убывает при монотонном стремлении ε к нулю. Поэтому предел (11), конечный или бесконечный, существует и равен на основании (12), (13)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma_\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma'_\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma''_\varepsilon| = |\Gamma|,$$

где последнее равенство следует из (7).

§ 10.11. Число π. Тригонометрические функции

Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$. Верхняя ее полуокружность Γ описывается непрерывной функцией $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Но производная $f'(x) = -x/\sqrt{1 - x^2}$ непрерывна только на интервале $(-1, 1)$. Поэтому формулу длины дуги § 10.3, (4) в данном случае законно пока применить только к отрезку $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ $[0 < \varepsilon < 1)$, на котором f непрерывна вместе со своей производной:

$$|\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1 + f'(x^2)^2}\, dx = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Но функция $(1 - x^2)^{-1/2}$ интегрируема на отрезке $[-1, +1]$, если интеграл понимать в несобственном смысле, поэтому по свойству § 10.10, (11)

$$|\Gamma| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} < \infty, \tag{1}$$

и мы доказали, что полуокружность Γ спрямляема и длина ее выражается числом, равным интегралу справа (1). Это число называется числом π:

$$\pi = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{2}$$

Мы дали обоснование существования этого важного предела со всей строгостью, предъявляемой в современном математическом анализе. В элементарной геометрии дается корректное определение длины дуги окружности, но существование ее обосновывается в общем при помощи интуитивных соображений, хотя и сопровождается логическими выкладками. Функция $\arccos x$ может быть определена при помощи равенства

$$\theta = \arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

где θ есть длина дуги $\smile{AB}$ (рис. 10.6), а x есть абсцисса точки B верхней полуокружности Γ.

Мы видим, что в силу свойств интеграла как функции нижнего предела функция $\arccos x$ непрерывна, строго убывает на отрезке $[-1, +1]$ и имеет производную

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Ясно также, что $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$.

В таком случае существует обратная к $\arccos x$, определенная на отрезке $[0, \pi]$ непрерывная, монотонно убывающая функция $x = \cos\theta$, называемая косинусом дуги θ (выраженной в радианах!).

Понятие длины дуги θ окружности обычным образом распространяется на всю действительную ось $(-\infty < \theta < \infty)$. Соответственно распространяется $\cos\theta$. Именно, мы полагаем, что $\cos\theta (-\infty < \theta < \infty)$ есть четная периода 2π функция, определенная на $[0, \pi]$ как выше. Это определение соответствует обычному определению, в силу которого $\cos\theta$ есть абсцисса

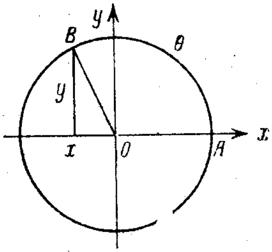

Рис. 10.6.

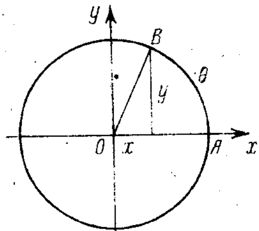

Рис. 10.7.

точки B окружности, имеющей дуговую координату θ. Из этого определения и свойств $\cos\theta$ на $[0, \pi]$ легко следует непрерывная дифференцируемость $\cos\theta$ на всей оси $(-\infty < \theta < \infty)$. Кроме того, из формулы (3) легко устанавливается, что $\cos\theta$ есть функция нечетная относительно $\theta = \frac{\pi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)$.

Будем теперь считать, что подвижная точка B принадлежит правой половине окружности (рис. 10.7),

$$x = \sqrt{1-y^2}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Функция

$$\theta = \arcsin y = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1 \tag{4}$$

выражает длину дуги $\smile{AB}$ с соответствующим знаком. Она, очевидно, непрерывна, нечетна, строго возрастает на $[-1, +1]$ и удовлетворяет свойствам $\theta(-1) = -\pi/2$, $\theta(0) = 0$, $\theta = \pi/2$. При этом она непрерывно дифференцируема на $(-1, +1)$. Обратная к ней функция

$$y = \sin\theta$$

строго возрастает и непрерывна на $[-\pi/2, +\pi/2]$. Ее продолжают на всю действительную ось, полагая четной относительно прямой $x = \pi/2 (\sin((\pi/2)+u) = \sin((\pi/2)-u))$ и периодической периода 2π. Легко проверяется, что $\sin\theta$ есть непрерывная на $(-\infty, \infty)$ функция, равная ординате точки B единичной окружности, имеющей дуговую координату θ.

Ясно, что $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $-\infty < \theta < \infty$, ведь $\cos\theta$ и $\sin\theta$ суть соответственно абсцисса и ордината одной и той же точки единичной окружности.

Имеет место равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2},$$
$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

выражающее геометрически, что для любого $x \in [-1, +1]$ дуга, принадлежащая $[-\pi/2, \pi/2]$, синус которой равен x, плюс дуга, принадлежащая $[0, \pi]$, косинус которой равен x, составляют в сумме число $\pi/2$.

Если $\theta \in [0, \pi]$ и $x = \cos\theta$, то $\theta = \arccos x$, а в силу (5) $\arcsin x = (\pi/2) - \theta$, следовательно,

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{6}$$

Аналогично, если $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $x = \sin\theta$, то $\theta = \arcsin x$, $\frac{\pi}{2} - \theta = \arccos x$, следовательно,

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{7}$$

Равенства (6), (7), если воспользоваться симметрическим и периодическим свойствами $\cos\theta$ и $\sin\theta$, легко распространить на любые θ.

Справедливы также равенства

$$(\sin\theta)' = \cos\theta, \quad (\cos\theta)' = -\sin\theta, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{8}$$

Ведь, например, из (4) следует $\dfrac{d\theta}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$, откуда и получается первое равенство (8):

$$(\sin\theta)' = \frac{dy}{d\theta} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$$

для $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, но тогда и для всех θ в силу указанных периодических и симметрических свойств функций $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

Пользуясь формулами (8) и тем фактом, что $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, можно вычислить производные высших порядков от функций $\cos\theta$, $\sin\theta$ в точке $\theta = 0$ и представить эти функции по формуле Тейлора с остаточными членами, соответствующими как угодно большому n, как это уже делалось в § 5.10. К тому же, пользуясь ограниченностью высших производных от наших функций $\left(\left|\dfrac{d^n\cos\theta}{d\theta^n}\right|, \left|\dfrac{d^n\sin\theta}{d\theta^n}\right| \leqslant 1\right)$, мы, как в § 5.10, можем заключить, что их тейлоровы остаточные члены стремятся при $n \to \infty$ к нулю для любого θ. Но тогда мы приходим к разложениям наших функций в степенные ряды

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots, \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \ldots, \tag{9}$$

с помощью которых можно получить (см. далее § 11.13) основные тригонометрические формулы

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned} \tag{10}$$

Конечно, формулы (10) можно получить и непосредственно из (3) и (4).

Пусть, например $0 < \alpha$, β и $\alpha+\beta \leqslant \pi$. Тогда (пояснения ниже: $\varkappa = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$)

$$\beta = \int\limits_{\cos\beta}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{\varkappa}^{\cos\alpha} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \int\limits_{\varkappa}^{1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} - \int\limits_{\cos\alpha}^{1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} \tag{11}$$

и $\alpha+\beta = \int\limits_{\varkappa}^{1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}}$. Отсюда в силу (3) получим первую формулу для указанных α, β.

Второе равенство цепи (11) получено путем замены переменной $x' = x\cos\alpha - \sqrt{1-x^2}\sin\alpha$. Равенство

$$\frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

следует из того, что

$$dx' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\cos\alpha\sqrt{1-x^2} + x\sin\alpha\right)dx$$

и $1 - x'^2 = \left(\cos\alpha\sqrt{1-x^2} + x\sin\alpha\right)^2$. Надо еще учесть, что в этом равенстве выражение в скобках неотрицательное. Полагая $x = \cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \beta$, запишем это выражение в виде $\cos\alpha\sin u + \cos u\sin\alpha$. Ясно, что оно не отрицательное, если α, $u \leqslant \pi/2$. Если же $\alpha < \pi/2$, $u > \pi/2$, то, учитывая, что $\sin t$ и $\cos t$ убывают на $[u, \pi-\alpha]$, получим

$$\cos\alpha\sin u + \cos u\sin\alpha \geqslant \cos\alpha\sin(\pi-\alpha) + \cos(\pi-\alpha)\sin\alpha = \\ = \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Другой случай, $u < \pi/2$, $\alpha > \pi/2$, доказывается также путем замены местами u и α.

В заключение отметим, что в приведенном здесь изложении неравенство (см. § 4.2, пример 5)

$$|\sin\theta| \leqslant |\theta| \tag{12}$$

можно доказать так:

$$|\theta| = \left|\int\limits_{0}^{\sin\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right| \geqslant \int\limits_{0}^{|\sin\theta|} 1\,dt = |\sin\theta|, \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и так как $\pi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant \int\limits_{-1}^{1} dt = 2$ и $|\sin\theta| \leqslant 1$, то (12) верно и для всех θ. Далее неравенство (см. § 4.9) $\theta \leqslant \operatorname{tg}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ можно получить, воспользовавшись теоремой Лагранжа: $\operatorname{tg}\theta - \theta = \theta(\sec^2\theta_1 - 1) \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \pi/2.$$