вопрос положительно решается на основании общей теории меры по Жордану (см. § 12.4).

Пример. Изображенная на рис. 10.2 окружность в полярных координатах определяется уравнением $\rho = 2R\cos\theta$. В силу (1) ее площадь равна

$$S = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi R^2.$$

§ 10.2. Объем тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y непрерывной положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью вращения кривой Γ вокруг оси x.

Производим разбиение отрезка $[a, b]$ на части $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ и считаем, что элемент ΔV объема тела, ограниченный плоскостями $x = x_k$, $x = x_{k+1}$, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \sim \pi y_k^2 \cdot \Delta x_k = \pi f(x_k)^2\, \Delta x_k.$$

Величина $V_n = \pi \sum\limits_0^{n-1} f(x_k)^2 \Delta x_k$ приближенно выражает V и

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_0^{n-1} f(x_k)^2\, \Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \qquad (1)$$

Мы получили формулу объема тела вращения. Приведем еще другой вывод этой формулы, основанной на введении дифференциала объема. Обозначим через $V(x)$ объем части тела, заключенный между плоскостями, проходящими через точки a и x оси x, перпендикулярно к последней (рис. 10.3). Приращение $\Delta V(x)$, соответствующее приращению $\Delta x > 0$, есть объем части тела, заключенной между плоскостями, перпендикулярными к оси x, проходящими через точки x и $x + \Delta x$.

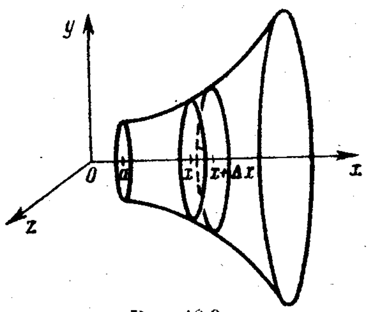

Рис. 10.3.

Докажем, что имеет место равенство

$$\Delta V = \pi f^2(x)\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0). \qquad (2)$$

В самом деле, пусть

$$m = \min_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi), \quad M = \max_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi).$$

Тогда, очевидно,

$$\pi m^2\Delta x \leqslant \Delta V(x) \leqslant \pi M^2\Delta x, \quad \pi m^2\Delta x \leqslant \pi f^2(x)\Delta x \leqslant \pi M^2\Delta x, \qquad (3)$$

и так как функция непрерывна, то $M - m \to 0$ $(\Delta x \to 0)$. Это показывает, что

$$\pi(M^2 - m^2)\Delta x = o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0). \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует (2).

Равенство (2) говорит, что первое слагаемое его правой части есть дифференциал V:

$$dV = \pi f^2(x)\Delta x = \pi f^2(x)dx.$$

На основании формулы Ньютона — Лейбница искомый объем равен

$$V = V(b) = V(b) - V(a) = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пример. Эллипсоид вращения (вокруг оси x)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

есть тело, ограниченное поверхностью вращения кривой

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad (-a \leqslant x \leqslant a)$$

вокруг оси x, поэтому на основании формулы (1) его объем равен

$$V = \pi b^2\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

§ 10.3. Длина дуги гладкой кривой

Пусть Γ есть гладкая кривая, определенная функциями (см. § 6.5)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \qquad (1)$$

таким образом, имеющими на $[a, b]$ непрерывные производные. Введем разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и составим сумму (см. § 6.8)

$$S_n = \sum_0^{n-1}\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2},$$

$$\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k), \quad \Delta y_k = \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k),$$
$$\Delta z_k = \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k), \quad \delta = \max\Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k,$$