Тогда, очевидно,

$$\pi m^2\Delta x \leqslant \Delta V(x) \leqslant \pi M^2\Delta x, \quad \pi m^2\Delta x \leqslant \pi f^2(x)\Delta x \leqslant \pi M^2\Delta x, \tag{3}$$

и так как функция непрерывна, то $M - m \to 0$ $(\Delta x \to 0)$. Это показывает, что

$$\pi(M^2 - m^2)\Delta x = o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует (2).

Равенство (2) говорит, что первое слагаемое его правой части есть дифференциал V:

$$dV = \pi f^2(x)\Delta x = \pi f^2(x)dx.$$

На основании формулы Ньютона — Лейбница искомый объем равен

$$V = V(b) = V(b) - V(a) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пример. Эллипсоид вращения (вокруг оси x)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

есть тело, ограниченное поверхностью вращения кривой

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad (-a \leqslant x \leqslant a)$$

вокруг оси x, поэтому на основании формулы (1) его объем равен

$$V = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

§ 10.3. Длина дуги гладкой кривой

Пусть Γ есть гладкая кривая, определенная функциями (см. § 6.5)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1}$$

таким образом, имеющими на $[a, b]$ непрерывные производные. Введем разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и составим сумму (см. § 6.8)

$$S_n = \sum_{0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2},$$

$$\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k), \quad \Delta y_k = \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k),$$

$$\Delta z_k = \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k), \quad \delta = \max \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k,$$

представляющую собой длину ломаной, вписанной в Г с вершинами в точках, соответствующих значениям t_k.

Имеем тогда ($t_k < \mu_k, \nu_k, \lambda_k < t_{k+1}$) при $\delta \to 0$

$$S_n = \sum_0^{n-1} \sqrt{\varphi'(\mu_k)^2 + \psi'(\nu_k)^2 + \chi'(\lambda_k)^2}\,\Delta t_k =$$

$$= \sum_0^{n-1} \sqrt{\varphi'(t_k)^2 + \psi'(t_k)^2 + \chi'(t_k)^2}\,\Delta t_k + \sum_0^{n-1} \varepsilon_k \Delta t_k \to$$

$$\to \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,dt.$$

В первом равенстве цепи мы воспользовались теоремой о среднем.

Чтобы обосновать, что $\sum \varepsilon_k \Delta t_k \to 0$ при $\delta \to 0$, введем вспомогательную функцию

$$\alpha(u, v, w) = \sqrt{\varphi'(u)^2 + \psi'(v)^2 + \chi'(w)^2},$$

очевидно непрерывную на кубе $\Delta = \{a \leqslant u, v, w \leqslant b\}$. Модуль ее непрерывности на Δ обозначим через $\omega(\delta)$. Так как расстояние между точками (t_k, t_k, t_k) и $(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)$ нашего куба не превышает $\delta\sqrt{3}$, то

$$|\varepsilon_k| = |\alpha(t_k, t_k, t_k) - \alpha(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)| \leqslant \omega(\delta\sqrt{3}),$$

и потому

$$\left|\sum_0^{n-1} \varepsilon_k \Delta t\right| \leqslant \varphi(\delta\sqrt{3}) \sum_0^{n-1} \Delta t_k = (b-a)\,\omega(\delta\sqrt{3}) \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Мы доказали, что длина гладкой кривой (1) существует и выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,dt. \tag{2}$$

При замене переменной при помощи непрерывно дифференцируемой функции $t = \lambda(\tau)$, ($\lambda'(\tau) > 0$, $c \leqslant \tau \leqslant d$) получим, очевидно,

$$S = \int_c^d \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \psi_1'(\tau)^2 + \chi_2'(\tau)^2}\,d\tau, \tag{3}$$

где $\varphi_1(\tau) = \varphi(\lambda(\tau))$, ..., что показывает инвариантность формулы (1) длины дуги.

Если кривая (плоская) задана уравнением

$$y = f(x), \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

где f имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то, очевидно, ее длина дуги выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

(надо положить в (2) $t = x$, $y = f(x)$, $z = 0$).

Пример. Длина дуги винтовой линии

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = b\theta, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0)$$

в силу (2) равна

$$S = \int_0^{\theta_0} \sqrt{a^2 + b^2}\,d\theta = \theta_0 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 10.4. Площадь поверхности тела вращения

Пусть Г есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную.

Вычислим площадь S поверхности вращения Г вокруг оси x. Для этого произведем разбиение $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

впишем в кривую Г ломаную Γ_n с вершинами $(x_k, f(x_k))$ и вычислим площадь поверхности вращения последней вокруг оси x:

$$S_n = \pi \sum_0^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}, \quad \Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k),$$

и перейдем к пределу при $\max \Delta x_k \to 0$.

В результате получим

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{2}$$

В самом деле, вынося из-под корня Δx_k $(\Delta x_k > 0)$ и применяя к Δy_k теорему о среднем, получим (пояснения ниже)

$$S_n = \pi \sum_0^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k =$$

$$= 2\pi \sum_0^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k + \alpha \to$$

$$\to 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \qquad (\max \Delta x_k \to 0, \ x_k < \xi_k < x_{k+1}),$$