где f имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то, очевидно, ее длина дуги выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

(надо положить в (2) $t = x$, $y = f(x)$, $z = 0$).

Пример. Длина дуги винтовой линии

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = b\theta, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0)$$

в силу (2) равна

$$S = \int_0^{\theta_0} \sqrt{a^2 + b^2}\,d\theta = \theta_0 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 10.4. Площадь поверхности тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную.

Вычислим площадь S поверхности вращения Γ вокруг оси x. Для этого произведем разбиение $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

впишем в кривую Γ ломанную Γ_n с вершинами $(x_k, f(x_k))$ и вычислим площадь поверхности вращения последней вокруг оси x:

$$S_n = \pi \sum_0^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}, \qquad \Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k),$$

и перейдем к пределу при $\max \Delta x_k \to 0$.

В результате получим

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{2}$$

В самом деле, вынося из-под корня Δx_k $(\Delta x_k > 0)$ и применяя к Δy_k теорему о среднем, получим (пояснения ниже)

$$S_n = \pi \sum_0^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k =$$

$$= 2\pi \sum_0^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k + \alpha \to$$

$$\to 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \qquad (\max \Delta x_k \to 0,\ x_k < \xi_k < x_{k+1}),$$

где

$$\alpha = \pi \sum_{0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)] \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k.$$

Доказательство того, что

$$\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x_k \to 0, \tag{3}$$

следует из соотношений:

$$|\alpha| \leqslant \pi \sqrt{1 + M^2} \sum_{0}^{n-1} |f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)|\, \Delta x_k <$$

$$< \varepsilon \sum_{0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon (b - a), \quad \max_k \Delta x_k < \delta,$$

где $M = \max\limits_{a < x < b} \sqrt{1 + f'(x)^2}$, и число $\delta > 0$, зависящее от $\varepsilon > 0$, настолько мало, что

$$|f(x_k) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2\pi \sqrt{1 + M^2}} \quad \text{при} \quad \Delta x_k < \delta.$$

Такое δ существует в силу равномерной непрерывности функции f на $[a, b]$.

Общее определение площади произвольной гладкой поверхности см. § 12.23, том II.

Пример. Площадь поверхности вращения куска параболы $y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ вокруг оси x равна $S = 2\pi \int\limits_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$.

§ 10.5. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и система точек

$$x_0, \; x_1, \; \ldots, \; x_n. \tag{1}$$

Поставим задачу: требуется найти многочлен*) $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, степени n совпадающий с $f(x)$ в указанных точках, т. е. чтобы выполнились равенства

$$f(x_k) = P(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Чтобы решить эту задачу, введем многочлены

$$Q_k(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)} \tag{3}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n).$$

*) Коэффициенты многочлена могут быть любыми числами, в частности, может быть $a_n = 0$.