где

$$\alpha = \pi \sum_{0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)] \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k.$$

Доказательство того, что

$$\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x_k \to 0, \tag{3}$$

следует из соотношений:

$$|\alpha| \leqslant \pi \sqrt{1+M^2} \sum_{0}^{n-1} |f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)|\,\Delta x_k <$$

$$< \varepsilon \sum_{0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon(b-a), \quad \max_k \Delta x_k < \delta,$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \sqrt{1 + f'(x)^2}$, и число $\delta > 0$, зависящее от $\varepsilon > 0$, настолько мало, что

$$|f(x_k) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2\pi\sqrt{1+M^2}} \quad \text{при} \quad \Delta x_k < \delta.$$

Такое δ существует в силу равномерной непрерывности функции f на $[a, b]$.

Общее определение площади произвольной гладкой поверхности см. § 12.23, том II.

Пример. Площадь поверхности вращения куска параболы $y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ вокруг оси x равна $S = 2\pi \int\limits_0^1 x^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx$.

§ 10.5. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и система точек

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n. \tag{1}$$

Поставим задачу: требуется найти многочлен*) $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, степени n совпадающий с $f(x)$ в указанных точках, т. е. чтобы выполнились равенства

$$f(x_k) = P(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Чтобы решить эту задачу, введем многочлены

$$Q_k(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \tag{3}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n).$$

*) Коэффициенты многочлена могут быть любыми числами, в частности, может быть $a_n = 0$.

Очевидно, что Q_k для каждого $k=0, 1, \ldots, n$ есть многочлен степени n, равный 1 в точке x_k и 0 в остальных точках системы (1): $Q_k(x_j)=\delta_{kj}$ $(k, j=0, 1, \ldots, n)$.

Символ δ_{kj} (Кронекера) определяется равенством:

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Положим

$$P(x)=\sum_0^n Q_k(x)\,f(x_k). \tag{4}$$

$P(x)$ есть многочлен степени n, обладающий свойствами

$$P(x_j)=\sum_0^n Q_k(x_j)\,f(x_k)=Q_j(x_j)\,f(x_j)=f(x_j)\quad (j=0, 1, \ldots, n),$$

т. е. он решает поставленную задачу и притом единственным образом, потому что, если допустить, что существует еще другой многочлен $P_1(x)$ степени n, решающий эту задачу, то разность $P(x)-P_1(x)$ была бы многочленом степени n, имеющим $n+1$ корней. Но тогда $P(x)-P_1(x)\equiv 0$.

Отметим, что если исходная функция f сама есть многочлен степени n, то $f(x)\equiv P(x)$ тождественно, потому что два многочлена, совпадающие в $n+1$ различных точках, тождественно равны.

§ 10.6. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций

Пусть надо вычислить определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f. Если известна ее первообразная, то для этого естественно применить формулу Ньютона — Лейбница. Но далеко не всегда первообразная известна и возникает задача о приближенном вычислении интеграла.

Простейший способ приближенного вычисления определенного интеграла вытекает из определения последнего. Делим отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k=a+k\frac{b-a}{N}\qquad (k=0, 1, \ldots, N) \tag{1}$$

и полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{N}\sum_0^{N-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right), \tag{2}$$

где знак $\approx$ выражает приближенное равенство.

Выражение (2) называется *квадратурной формулой прямоугольников*. В случае рис. 10.4 искомая площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью x и прямыми $x=a$, $x=b$, при-