Очевидно, что Q_k для каждого $k=0, 1, \ldots, n$ есть многочлен степени n, равный 1 в точке x_k и 0 в остальных точках системы (1): $Q_k(x_j)=\delta_{kj}$ $(k, j=0, 1, \ldots, n)$.

Символ δ_{kj} (Кронекера) определяется равенством:

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Положим

$$P(x)=\sum_0^n Q_k(x)\,f(x_k). \tag{4}$$

$P(x)$ есть многочлен степени n, обладающий свойствами

$$P(x_j)=\sum_0^n Q_k(x_j)\,f(x_k)=Q_j(x_j)\,f(x_j)=f(x_j) \quad (j=0, 1, \ldots, n),$$

т. е. он решает поставленную задачу и притом единственным образом, потому что, если допустить, что существует еще другой многочлен $P_1(x)$ степени n, решающий эту задачу, то разность $P(x)-P_1(x)$ была бы многочленом степени n, имеющим $n+1$ корней. Но тогда $P(x)-P_1(x)\equiv 0$.

Отметим, что если исходная функция f сама есть многочлен степени n, то $f(x)\equiv P(x)$ тождественно, потому что два многочлена, совпадающие в $n+1$ различных точках, тождественно равны.

§ 10.6. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций

Пусть надо вычислить определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f. Если известна ее первообразная, то для этого естественно применить формулу Ньютона — Лейбница. Но далеко не всегда первообразная известна и возникает задача о приближенном вычислении интеграла.

Простейший способ приближенного вычисления определенного интеграла вытекает из определения последнего. Делим отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k=a+k\frac{b-a}{N} \qquad (k=0, 1, \ldots, N) \tag{1}$$

и полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_0^{N-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right), \tag{2}$$

где знак $\approx$ выражает приближенное равенство.

Выражение (2) называется *квадратурной формулой прямоугольников*. В случае рис. 10.4 искомая площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью x и прямыми $x=a$, $x=b$, приближенно равна сумме площадей изображенных там прямоугольников.

Мы знаем, что для непрерывной на $[a, b]$ функции предел при $N \to \infty$ правой части приближенной формулы (2) точно равен левой, что дает основание считать, что при большом N ошибка квадратурной формулы (2), т. е. абсолютная величина разности правой и левой ее частей, мала.

Однако возникает вопрос об оценке ошибки. Ниже мы узнаем, как эту оценку получить, если потребовать, чтобы функция f, кроме непрерывности, удовлетворяла некоторым условиям гладкости.

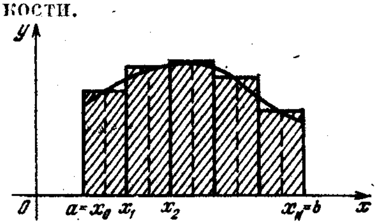

Рис. 10.4.

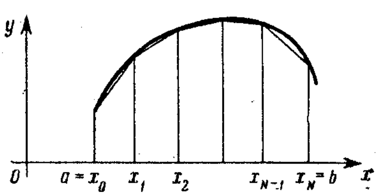

Рис. 10.5.

Очень важно заметить, что если функция $f(x) = Ax + B$ есть линейная функция, то для нее *формула* (2) *точна* — правая часть (2) в точности равна левой. Так как линейная функция есть многочлен первой степени, то мы можем сказать, что *квадратурная формула прямоугольников точна для всех многочленов не выше первой степени.*

Дадим еще второй естественный способ приближенного вычисления определенного интеграла, приводящий к *квадратурной формуле трапеций.* Он заключается в том, что отрезок $[a, b]$ делится на равные части точками системы (1) и полагается приближенно, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2}\right) = \frac{b-a}{2N}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\right). \quad (3)$$

В формуле трапеций площадь рассмотренной выше криволинейной фигуры приближенно исчерпывается трапециями (рис. 10.5). Важно отметить, что *формула трапеций точна для линейных функций* $Ax + B$ (A, B — постоянные), т. е. для многочленов не выше первой степени; если подставить такую функцию в (3) вместо $f(x)$, то получится точное равенство. В этом смысле формула трапеций не имеет преимущества перед формулой прямоугольников, обе они точны для линейных функций.