§ 10.7. Общая квадратурная формула. Функционал

Понятие квадратурной формулы мы теперь обобщим. Зададим (на отрезке $[a, b]$) систему точек

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_N \leqslant b \tag{1}$$

и систему чисел

$$p_0, p_1, \ldots, p_N. \tag{2}$$

Положим для непрерывной на $[a, b]$ функции f

$$L(f) = \sum_0^N p_k f(x_k) \tag{3}$$

и чисто формально будем считать $L(f)$ приближенным выражением нашего интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L(f). \tag{4}$$

Приближенное равенство (4) называется *квадратурной формулой с узлами* (1) и весами (2).

Пусть $\mathfrak{M}$ обозначает некоторое множество функций f и каждому $f \in \mathfrak{M}$ в силу определенного закона приведено в соответствие число $F(f)$; тогда говорят, что F есть *функционал*, определенный на $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ есть линейное множество (см. § 6.1) и F обладает свойством

$$F(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F(f_1) + \beta F(f_2),$$

каковы бы ни были числа α, β и функции $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}$, то говорят, что *функционал* F (определенный на $\mathfrak{M}$) — *линейный*.

Множество всех непрерывных на $[a, b]$ функций принято обозначать через $C = C(a, b)$. Это — линейное множество, потому что, если α, β — числа и $f_1, f_2 \in C$, то $\alpha f_1 + \beta f_2 \in C$. Интеграл $\int_a^b f\,dx$ есть, очевидно, линейный функционал, определенный на C. Выражение $L(f)$ (см. (3)) есть тоже, как легко видеть, линейный функционал, определенный на C. Отсюда следует, что если равенство (4) оказалось точным для непрерывных функций $f_1, \ldots, f_l$, взятых в конечном числе, то оно автоматически точно для функций $\sum_1^l \alpha_k f_k(x)$, где α_k — произвольные числа.